Internationale Jahrestagung des DVfVW e.V.
Wien,10. bis 11. März 2016
Forum 3, Lebensversicherung I

Das Parameterrisiko in der Risikokapitalberechnung

David Blanco de Tena-Dávila, Professor Dr. Annegret Weng
Hochschule für Technik Stuttgart

Dieses Projekt wird im Rahmen der Wissenschaftsförderung des DVfVW e.V. aus Mitteln des GDV gefördert.

Annahmen

- Der jährliche Verlust entspricht einer Zufallsvariable $\mathbf{X}(\theta_0)$.
- Wir kennen die parametrisierte Verteilungsfamilie $\left\{ \mathbf{X}(\theta) : \theta \in I \subseteq R^d \right\}$.
- Der wahre Parameter (vektor) θ_0 ist dem Unternehmen nicht bekannt und kann nur auf Grundlage von historischen Beobachtungen geschätzt werden.

Aus Sicht des Unternehmens besteht Unsicherheit bezüglich des Parameters θ_0.

Eingangsbeispiel

Sei

S = {150.01,152.33,120.47,131.87,

139.07,157.97,128.37,122.89,166.47,133.18}

eine Stichprobe eines Risikos **X**.

Wir wissen, dass **X** lognormalverteilt ist.

Aus der Stichprobe können wir z.B. mit ML Parameter $(\hat{\mu}_1, \hat{\sigma}_1) = (4.94,\ 0.1)$

ermitteln.

Welches Risikokapital sollen wir stellen?

Agenda

Angemessenheit und bisherige Ansätze[1]

Neue Ergebnisse

Zusammenfassung und Ausblick

1 vgl. Fröhlich, A. and Weng, A., *Modelling parameter uncertainty for risk capital calculatio*n, European Actuarial Journal, Vol. 5, Issue No. 1 Springer Berlin Heidelberg, 2015, pp. 79–112

Interpretation der Rahmenrichtlinie

Definition (**Risikokapitalbedarf** – Interpretation Artikel 101 Rahmenrichtlinie):

Der Risikokapitalbedarf ist so zu modellieren, dass er mit 99,5%-iger Sicherheit nicht vom möglichen Verlust $\boldsymbol{X}$ an Basiseigenmittel innerhalb des nächsten Jahres übertroffen wird, d.h.

$$P(\mathbf{X} \leq RKB(99{,}5\%;\mathbf{D}_1,\ldots,\mathbf{D}_n)\ ) = 99{,}5\%$$

- unter Berücksichtigung, dass sowohl $\boldsymbol{X}$ als auch $RKB(99{,}5\%;\mathbf{D}_1,\ldots,\mathbf{D}_n)$ zufällig sind.

Die Methode ist angemessen, wenn das vorgegebenen Konfidenzniveau erreicht wird

Definition (Angemessenheit der Parameterverteilung)

Die Methode M nennen wir **angemessen für das Konfidenzniveau** $0 < \alpha < 1$, wenn

$$P(\boldsymbol{X} \leq RKB(\alpha; \boldsymbol{D}_1, \ldots \boldsymbol{D}_n; M)) = \alpha$$

Wir nennen die Methode **angemessen**, wenn sie für alle $0 < \alpha < 1$ angemessen ist.

Ohne Berücksichtigung der Parameterunsicherheit wird das vorgeschriebene Konfidenzniveau nicht erreicht

Sei $\mathbf{X}$ lognormalverteilt.

Parametervektor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ mit ML-Methode aus i.i.d. Daten $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n \sim \mathbf{X}$ geschätzt.

Setze

$$RKB(\alpha; \mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n) := \alpha - \text{Quantil von } \mathbf{X}\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right).$$

Stochastische Simulation von $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ und $\mathbf{X}$ liefert für $n = 10$:

α	90%	95%	99,5%
$P\left(\mathbf{X} \le RKB(\alpha; \mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)\right)$	86,2%	91,5%	97,8%

Die tatsächlichen Solvenzwahrscheinlichkeiten $P\left(\mathbf{X} \le \mathbf{RKB}\right)$ sind deutlich kleiner als das vorgegebene Konfidenzniveau α !

Bisherige Ansätze zur Modellierung eines angemessenen Risikokapitalbedarfs

- Bootstrapping
- Bayesscher Ansatz[1] (unter Verwendung einer geeigneten nicht-informativen prior-Verteilung)
- Anhebung des Konfidenzlevels bzw. Anpassung des Verlustverteilung[2]
- Inversionsmethode[3]: Führt nachweislich auf einen angemessenen Risikokapitalbedarf für
  - *transformed location-scale families* zusammen mit
    - der Maximum-Likelihood-Methode,
    - der Perzentilmethode oder
    - der Bayesschen Schätzmethode mit einer geeigneten Priorverteilung.
  - *location-scale families* zusammen mit der Momentmethode.

1. Gerrard, R. , Tsanakas A., *Failure probability under parameter uncertainty*, Risk Analysis, Vol. 8, Issue 5, 2011, pp. 727 – 744
2. Bignozzi, V. and Tsanakas, A., *Model uncertainty in risk capital measurement* (2015). Journal of Risk, to appear
3. Fröhlich, A. and Weng, A., *Modelling parameter uncertainty for risk capital calculatio*n, European Actuarial Journal, Vol. 5, Issue No. 1, Springer Berlin Heidelberg, 2015, pp. 79–112

Beispiel Inversionsmethode: Parameterverteilung für die Lognormalverteilung

Beispiel. Seien $\mathbf{X}$ und die Daten $\mathbf{D} = (\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$ i.i.d. **Lognormalverteilt** mit Parameter $\theta = (\mu, \sigma)$

Schätzer mit Maximum-Likelihood-Methode

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum \ln x_i = \frac{1}{n}\sum \ln X_i(\zeta_i, \theta) = \frac{1}{n}\sum (\mu + \sigma \cdot Z_i(\zeta_i)) = \mu + \sigma \cdot \overline{Z}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum (\ln x_i - \hat{\mu})^2 = \frac{1}{n}\sum (\ln X_i(\zeta_i, \theta) - \hat{\mu})^2 = \frac{\sigma^2}{n}\sum (Z_i(\zeta_i) - \overline{Z})^2$$

mit standardnormalverteilten Z_i.

Die rechte Seite der obigen Gleichungen definiert eine Abbildung: $H_\zeta : (\mu, \sigma) \mapsto (\hat{\mu}, \hat{\sigma})$

Inverse durch Auflösen der beiden Gleichungen nach μ, σ:

$$H_\zeta^{-1}(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) = \left(\hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma} \cdot \sqrt{n} \cdot \overline{Z}}{\sqrt{\sum (Z_i(\zeta_i) - \overline{Z})^2}}, \frac{\hat{\sigma}^2 \cdot n}{\sum (Z_i(\zeta_i) - \overline{Z})^2} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\theta}_{sim} = H_{\zeta'}^{-1}(\hat{\mu}_0, \hat{\sigma}_0) = \left(\hat{\mu}_0 - \frac{\sqrt{n} \cdot \hat{\sigma}_0 \cdot \overline{\mathbf{Z}}}{\sqrt{\mathbf{M}}}, \frac{\hat{\sigma}_0^2 \cdot n}{\mathbf{M}} \right)$$

mit $\overline{\mathbf{Z}} \sim N(0, \frac{1}{\sqrt{n}})$ und $\boldsymbol{M}$ χ^2-verteilt mit n-1 Freiheitsgraden.

Agenda

Angemessenheit und bisherige Ansätze

Neue Ergebnisse

Zusammenfassung und Ausblick

Agenda

Risikokapitalberechnung aus Unternehmenssicht

Angemessenheit und bisherige Ansätze

Neue Ergebnisse

- **Lognormalverteilung**
- Gammaverteilung
- Paretoverteilung
- Diskrete Verteilungen und Kollektives Modell

Zusammenfassung und Ausblick

Lognormalverteilung mit Momentenmethode

- Falls $d_1,\ldots,d_n$ eine Stichprobe einer lognormalverteilten Zufallsvariable mit unbekannten Parametern μ und σ ist, dann sind die Schätzer nach der Momentenmethode durch

$$\hat{\mu} = \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i\right) - \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i^2\right) - 2\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i\right)$$

gegeben.

- Eine Realisierung $(\mu_{sim}, \sigma_{sim})$ der Parameterverteilung $(\boldsymbol{\mu}_{sim}, \boldsymbol{\sigma}_{sim})$ nach der Inversionsmethode ergibt sich aus

$$0 = \hat{\sigma}^2 + \ln\left(\frac{1}{n}\right) + 2\ln\left(\sum_{i=1}^{n} e^{\sigma_{sim}\cdot \mathbf{Z}_i}\right) - \ln\left(\sum_{i=1}^{n} e^{2\sigma_{sim}\cdot \mathbf{Z}_i}\right)$$

$$\mu_{sim} = \hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 - \ln\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(\sum_{i=1}^{n} e^{\sigma_{sim}\cdot Z_i}\right)$$

- σ_{sim} kann numerisch mit dem Newtonverfahren ermittelt werden.

Generelles Vorgehen zur Bestimmung des Solvenzwahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit $P(\mathbf{X} \leq RKB(\alpha; \mathbf{D}_1, \ldots \mathbf{D}_n; M))$ für eine Methode M und ein vorgegebenes Konfidenzniveau α berechnen wir als relative Häufigkeit wie folgt:

Wähle s=100.000 Realisierungen X und Stichproben $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$.

Für jede Stichprobenwahl und Wahl einer Realisierung wiederhole die folgenden Schritte:

1. Bestimme $\hat{\mu}$ und $\hat{\sigma}$ unter Verwendung einer festen Schätzmethode.

2. Bestimme t=10.000 Realisierung $(\mu_{sim}, \sigma_{sim})$ der Parameterverteilung $(\boldsymbol{\mu}_{sim}, \boldsymbol{\sigma}_{sim})$

   und ermittle das empirische α - Quantil von $\mathbf{X}(\boldsymbol{\mu}_{sim}, \boldsymbol{\sigma}_{sim})$.

3. Teste, ob

$$\mathrm{X} \leq \alpha\text{-Quantil von } \mathbf{X}(\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{sim},} \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{sim}}).$$

Solvenzwahrscheinlichkeiten ohne Berücksichtigung der Parameterunsicherheit:

n	μ	σ	$\alpha = 90\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$	$\alpha = 99.5\%$
10	1	0.1	86.70%	91.49%	96.50%	97.94%
10	1	1	86.25%	91.01%	96.64%	97.81%
20	1	0.1	87.61%	93.40%	98.13%	98.84%
20	1	1	87.73%	93.25%	98.12%	98.63%

Solvenzwahrscheinlichkeiten mit der Inversionsmethode:

n	μ	σ	$\alpha = 90\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$	$\alpha = 99.5\%$
10	1	0.1	89.97%	94.92%	99.01%	99.49%
10	1	1	89.98%	95.22%	99.07%	99.52%
20	1	0.1	90.07%	95.05%	99.01%	99.50%
20	1	1	90.12%	95.11%	99.05%	99.55%

Eingangsbeispiel (Fortsetzung)

Benötigtes Risikokapital ohne und mit Berücksichtung der Parameterunsicherheit:

Schätz-methode	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	**Ohne Parameter-unsicherheit**	**Mit Berücksichtigung der Parameter-unsicherheit**
Momenten-methode	4.9380	0.1054	182.92	204.07
ML-Methode	4.9380	0.1047	182.65	203.06

Agenda

Risikokapitalberechnung aus Unternehmenssicht

Angemessenheit und bisherige Ansätze

Neue Ergebnisse

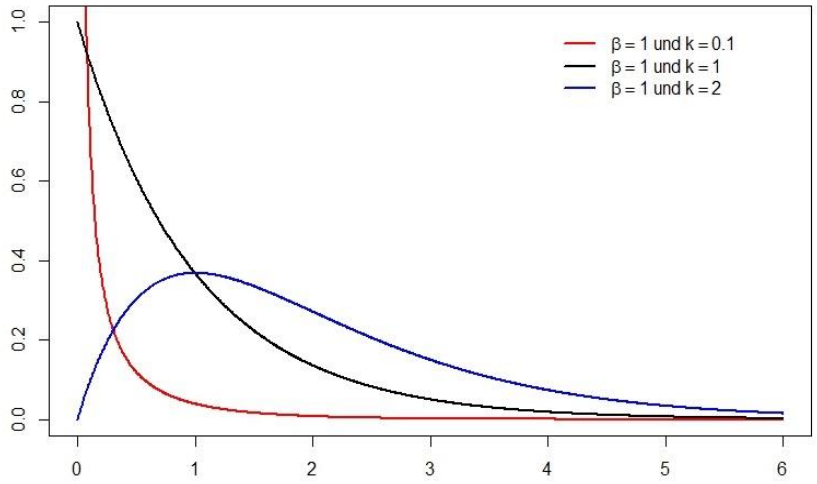
- Lognormalverteilung
- **Gammaverteilung**
- Paretoverteilung
- Diskrete Verteilungen und Kollektives Modell

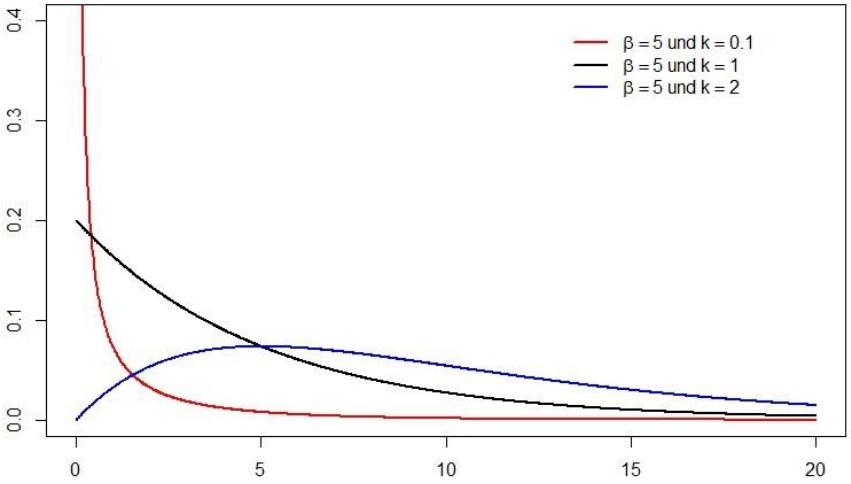
Zusammenfassung und Ausblick

Gammaverteilung

Sei $\mathbf{X}$ eine Gamma-verteilte Zufallsvariable mit Formparameter k und Skalenparameter β mit Dichtefunktion

$$f(x;k,\beta) = \frac{\left(\frac{1}{\beta}\right)^k \cdot x^{k-1} \cdot \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)}{\Gamma(k)}.$$





- Wir wenden die Inversionmethode auf den Fall der Gammaverteilung mit unbekanntem Formparameter k und bekanntem Skalenparameter β an.

- Wie wird eine Realisierung k_{sim} von $\mathbf{k}_{sim}$ bestimmt, falls der Skalenparameter β bekannt ist?

  - Berechne $\hat{k} = \dfrac{\overline{X}_n}{\beta}$.

  - Da $\overline{X}_n \sim \Gamma\left(n \cdot k, \dfrac{\beta}{n}\right)$, wählen wir $\xi \in [0,1]$ und bestimmen einen Wert k', so dass die Gleichung

$$F^{-1}_{\Gamma\left(n \cdot k, \frac{\beta}{n}\right)}(\xi) = \hat{k} \cdot \beta$$

    erfüllt ist.

  - Setze $k_{sim} = k'$.

Solvenzwahrscheinlichkeiten ohne Berücksichtigung der Parameterunsicherheit bezüglich des Formparameters (unter Verwendung der ML-Methode):

n	β	k	$\alpha = 90\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$	$\alpha = 99.5\%$
10	1	1	86.25%	91.41%	96.64%	97.61%
10	1	2	86.28%	91.40%	96.73%	97.81%
10	1	4	86.29%	91.41%	96.77%	97.88%

Solvenzwahrscheinlichkeiten mit Inversionsmethode (unter Verwendung der ML-Schätzung):

n	β	k	$\alpha = 90\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$	$\alpha = 99.5\%$
10	1	1	90.04%	95.00%	99.01%	99.50%
10	1	2	89.99%	95.00%	99.00%	99.50%
10	1	4	90.13%	94.97%	98.98%	99.49%

Agenda

Risikokapitalberechnung aus Unternehmenssicht

Angemessenheit und bisherige Ansätze

Neue Ergebnisse

- Lognormalverteilung
- Gammaverteilung
- **Paretoverteilung**
- Diskrete Verteilungen und Kollektives Modell

Zusammenfassung und Ausblick

Paretoverteilung

Sei $\mathbf{X}$ eine Pareto-verteilte Zufallsvariable mit Formparameter k und Skalenparameter β mit Dichtefunktion

$$f(x;k,\beta) = k \cdot \frac{\beta^k}{x^{k+1}} \quad \text{, for} \quad x \geq \beta \quad .$$

- Wir betrachten den Fall, dass beide Parameter unbekannt sind; der Fall mit unbekannten Form-, aber bekanntem Skalenparameter führt auf ähnliche Ergebnisse.
- Die Parameter mit der ML-Methode sind gegeben durch

$$\hat{\beta} = \min_i d_i \quad \text{und} \quad \hat{k} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln d_i - \ln \beta} \quad .$$

- Da $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ und $\hat{\mathbf{k}}$ stochastisch unabhängig sind und die Verteilungen von beiden bekannt sind, können wir Realisierungen (k_{sim}, β_{sim}) von $(\mathbf{k}_{\mathbf{sim}}, \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{sim}})$ nach der Inversionmethode numerisch (ähnlich wie für die Lognormalverteilung) bestimmen.

Solvenzwahrscheinlichkeiten ohne Berücksichtigung der Parameterunsicherheit (unter Verwendung der ML-Methode):

n	β	k	$\alpha = 90\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$	$\alpha = 99.5\%$
10	1	1	85.90%	91.41%	96.99%	98.02%
10	1	2	85.91%	91.40%	97.00%	98.02%
10	1	3	85.92%	91.40%	96.99%	98.02%

Solvenzwahrscheinlichkeiten mit Inversionsmethode (unter Verwendung der ML-Schätzung):

n	β	k	$\alpha = 90\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$	$\alpha = 99.5\%$
10	1	1	90.00%	95.05%	98.98%	99.48%
10	1	2	89.87%	95.04%	98.99%	99.53%
10	1	3	89.86%	94.93%	98.98%	99.50%

Agenda

Risikokapitalberechnung aus Unternehmenssicht

Angemessenheit und bisherige Ansätze

Neue Ergebnisse

- Lognormalverteilung
- Gammaverteilung
- Paretoverteilung
- **Diskrete Verteilungen und Kollektives Modell**

Zusammenfassung und Ausblick

Das kollektive Modell

Das Gesamtrisiko $\mathbf{S}$ ist hier gegeben durch

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{\mathbf{M}} \mathbf{D}_i \ ,$$

wobei $\mathbf{M}$ eine diskrete Zufallsvariable ist, die die Schadenanzahl beschreibt, und $\mathbf{D}_i$ mit $\mathbf{D}_i \sim \mathbf{X}$ die Schadenhöhe beschreibt. Weiter gilt, dass die einzelnen $\mathbf{D}_i$ unabhängig und unabhängig von $\mathbf{X}$ sind.

Wir nehmen an, dass wir den Parameter für $\mathbf{M}$ aus einer Stichprobe $(M_1,...,M_{n_M})$ schätzen und den Parameter für $\mathbf{D}$ aus einer Stichprobe $(D_1,...,D_{n_D})$.

Wir wenden hier nun die Inversionsmethode an, in dem wir eine Zufallsvariable $\mathbf{M}_{sim}$ und eine weitere Zufallsvariablen $\mathbf{D}_{i,sim}$ bestimmen und dann

$$\mathbf{S}_{sim} = \sum_{i=1}^{\mathbf{M}_{sim}} \mathbf{D}_{i,sim}$$

setzen.

Dazu ist es notwendig, die Inversionsmethode auch auf diskrete Verteilungsfamilien zu erweitern.

Demonstration des Vorgehens an einem Beispiel

Angenommen, $\mathbf{M}$ ist Poissonverteilung mit Parameter λ,

und $\mathbf{D}$ ist normalverteilt mit bekanntem Erwartungswert $\mu = 0$ und unbekannter Standardabweichung σ.

Wir setzen $\mathbf{D}_{i,sim} \sim N(0, \boldsymbol{\sigma}_{sim}^2)$ mit $\boldsymbol{\sigma}_{sim} = \sqrt{n_D \cdot \frac{\hat{\sigma}^2}{\mathbf{C}_{n_D}}}$ und $\mathbf{C}_{n_D} \sim \boldsymbol{\chi}^2(n_D)$.

Weiter setzen wir $\mathbf{M}_{sim} \sim Pois(\boldsymbol{\lambda}_{sim})$.

Da ein einseitiges Konfidenzintervall für λ durch

$$\left(\frac{1}{2n_M} F^{-1}_{\mathbf{C}(2n_M \hat{\lambda})}(\varsigma), \infty \right)$$

gegeben ist, motiviert dies

$$\boldsymbol{\lambda}_{sim} \sim \frac{1}{2n_M} F^{-1}_{\mathbf{C}(2\dot{n}_M \hat{\lambda})}(\boldsymbol{\varsigma})$$

Solvenzwahrscheinlichkeiten ohne Berücksichtigung der Parameterunsicherheit:

$n_D = n_M$	λ	σ	$\alpha = 90\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$	$\alpha = 99.5\%$
10	1	1	88.48%	93.61%	98.20%	98.92%
10	1	10	88.50%	93.53%	98.01%	98.77%
10	5	1	88.31%	93.61%	98.12%	98.86%
10	5	10	88.59%	93.46%	99.08%	98.81%

Solvenzwahrscheinlichkeiten mit der Inversionsmethode:

$n_D = n_M$	λ	σ	$\alpha = 90\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$	$\alpha = 99.5\%$
10	1	1	88.91%	94.46%	98.85%	99.42%
10	1	10	89.82%	94.87%	98.97%	99.50%
10	5	1	88.83%	94.42%	98.87%	99.42%
10	5	10	89.77%	94.81%	98.95%	99.49%

Agenda

Angemessenheit und bisherige Ansätze

Neue Ergebnisse

- Lognormalverteilung
- Gammaverteilung
- Paretoverteilung
- Diskrete Verteilungen und Kollektives Modell

Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung und Ausblick

- Die Inversionsmethode lässt sich nicht nur auf transformed location-scale families zusammen mit dem ML-Methode (und zwei weitere Schätzmethode) anwenden, sondern bietet einen Ansatz, um auch für andere Wahrscheinlichkeitsverteilungen bzw. andere Schätzmethoden ein angemessenes Risikokapital zu ermitteln.

- Sie ist intuitiv und einfach umzusetzen.

- Falls die Daten aber nicht auf Level des Gesamtrisikos, sondern granularer vorliegen, gibt es noch zahlreiche Probleme zu lösen (siehe kollektives Modell).

- Welche der experimentell bereits erzielten Ergebnisse lassen sich mathematisch beweisen?

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Kontakt

David Blanco de Tena-Dávila

Prof. Dr. Annegret Weng

Hochschule für Technik

Schellingstr. 24

70174 Stuttgart

Tel. 0711-8926-2730

E-Mail: annegret.weng@hft-stuttgart.de