Eigenmittelanforderung unter Solvency II

Betrachtung der Standardformel für das Prämien- und Reserverisiko im versicherungstechnischen Nichtlebenbereich

Martin Hampel, Prof. Dr. Dietmar Pfeifer

Institut für Mathematik,
Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

17. März 2011

1. Einführung
2. Bias in der SCR-Kalkulation
3. Korrekturformel
4. Zusammenfassung

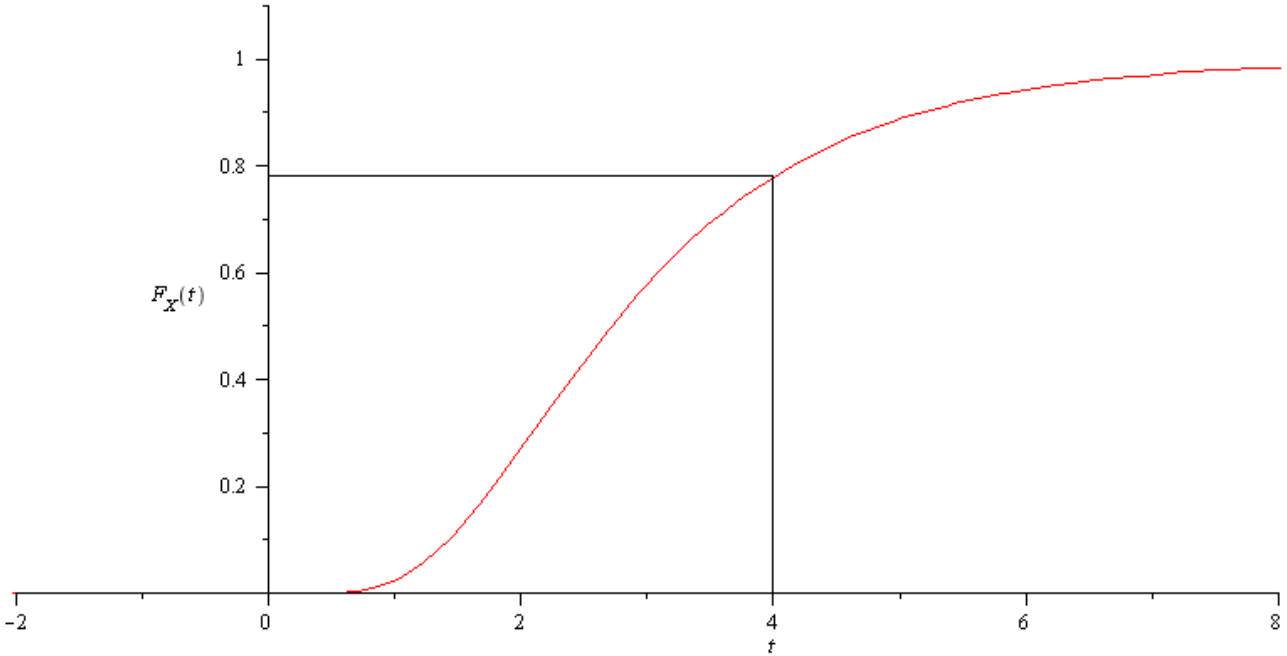
Solvency II

- Solvency II ist ein EU-Projekt zur Weiterentwicklung der „Solvabilitätsvorschriften für Versicherungsunternehmen zu einem konsequenten risikoorientierten System der Finanzaufsicht“[1].
- Zur Erfüllung der in Solvency II gestellten Richtlinien existiert ein Standardansatz.
- Solvency II ist ab 2013 in nationales Recht umzusetzen.

[1] Vgl. Einleitung der BaFin zum Thema Solvency II

Mathematische Bezeichnungen

- X bezeichnet eine reelle Zufallsvariable (ZVe).
- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist gegeben durch $F_X(t) = P(X \leq t), t \in \mathbb{R}^+$.
- $F_X^{-1}(u) := \inf\{t \in \mathbb{R}_0^+ \mid P(X \leq t) \geq u\}$ heißt das u-Quantil von X.
- Ist F_X auf seinem Träger streng monoton, so ist F_X^{-1} die inverse Funktion zu F_X.



Definition

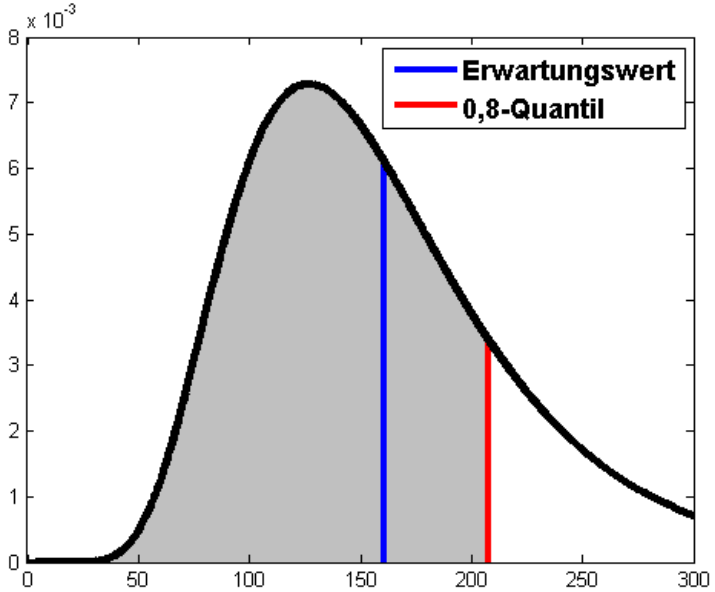
Aufgrund der Stochastizität gilt

$$P(X \leq E(X)) < 1.$$

Das zum Erreichen eines vorgegebenen Sicherheitsniveaus $1-\alpha$ zusätzlich zu $E(X)$ **nötige Kapital** heißt das notwendige Solvenzkapital zum Niveau α (**S**olvency **C**apital **R**equirement), formal

$$\begin{aligned} SCR_\alpha(X) &= F_X^{-1}(1-\alpha) - E(X) \\ &= VaR_\alpha(X) - E(X). \end{aligned}$$

In Solvency II wird $\alpha = 0.005$ gesetzt.



Technische Annahmen

Zur Transparenz werden

- die versicherungstechnische Seite im Nichtlebenbereich und nur eine geographische Lage betrachtet,
- das Versicherungsjahr und Geschäftsjahr als zeitlich übereinstimmend angenommen,
- Marktdaten nicht berücksichtigt,

...

Technische Annahmen

- sämtliche Vertragslaufzeiten und Schadenabwicklungszeiträume als einjährig angenommen,
- die vorgegebenen Parameter verwendet.

1 Einführung

2 Bias in der SCR-Kalkulation

3 Korrekturformel

4 Zusammenfassung

SCR in SII

Das SCR errechnet sich gemäß QIS 5 als

$$SCR_{QIS5} = \left(\frac{\exp\left(\Phi^{-1}(0,995)\sqrt{\ln(s^2+1)}\right)}{\sqrt{s^2+1}} - 1 \right) V,$$

mit $V := \max(V_0, V_{-1}) + \underbrace{V_{PP}}_{=0 \text{ n. V.}}$.

Dabei bezeichnen

- s^2 die Varianz der Schadenquote,
- $\Phi^{-1}(0,995)$ das 0,995-Quantil der Standardnormalverteilung,
- V_0 und V_{-1} die aktuelle Prämie bzw. die des Vorjahres.

Solvency Capital Requirement

- Für eine lognormalverteilte ZVe X mit $E(X) = 1$ und $Var(X) = s^2$ gilt

$$SCR_{QIS5} \approx (F_X^{-1}(0,995) - 1)V_0. \tag{1}$$

- Im Fall $V_0 \geq V_{-1}$ ergibt sich in Darstellung (1) Gleichheit.
- Bei Gleichheit entspricht die Rechnung exakt der Richtlinie, die Aufwendung für das 200-Jahresereignis decken zu können.
- Ansonsten konservative Schätzung in QIS 5 durch Definition von V.

Das Quantil einer lognormalverteilten ZVen mit Erwartungswert m und Varianz s^2 ist gegeben durch

$$F^{-1}_{m,s^2}(u) = \exp\left(q_u\sqrt{\ln\left(\frac{s^2}{m^2}+1\right)} + \ln(m) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2}{m^2}+1\right)\right)$$
$$\neq \frac{\exp\left(\Phi^{-1}(0,995)\sqrt{\ln(s^2+1)}\right)}{\sqrt{s^2+1}} = F^{-1}_{1,s^2}(u)$$

Insbesondere reicht es nicht aus, den Parameter in der QIS 5-Formel als Variationskoeffizienten zu interpretieren.

Satz

Es seien X_1, X_2 lognormalverteilte ZVen mit $E(X_i) = m_i$, $Var(X_i) = s_i^2$ $(i = 1, 2)$ und $(m_1, s_1^2) \neq (m_2, s_2^2)$. Es existiert ein $u \in (0, 1)$ so, dass

$$F^{-1}_{m_1, s_1^2}(u) = F^{-1}_{m_2, s_2^2}(u)$$

gilt, genau dann wenn

$$\sigma_1 \neq \sigma_2.$$

u ist dann insbesondere eindeutig gegeben durch

$$u = \Phi\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\sigma_1 - \sigma_2}\right)$$

Dabei bezeichnen μ_i und σ_i Mittelwert bzw. Standardabweichung der ZVen $\ln(X_i)$ $(i = 1, 2)$.

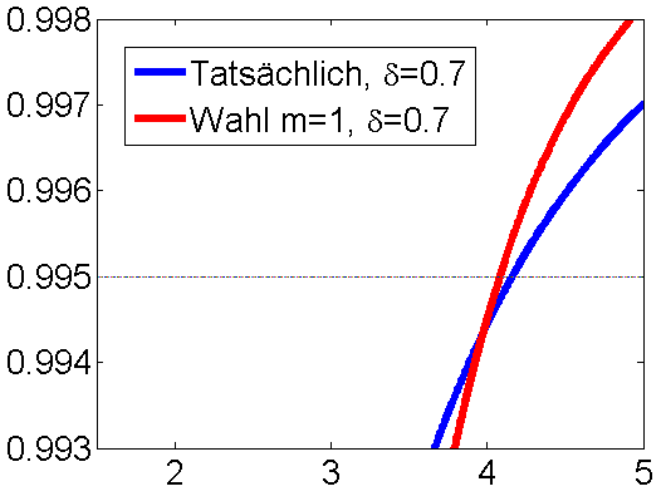
Beispiel

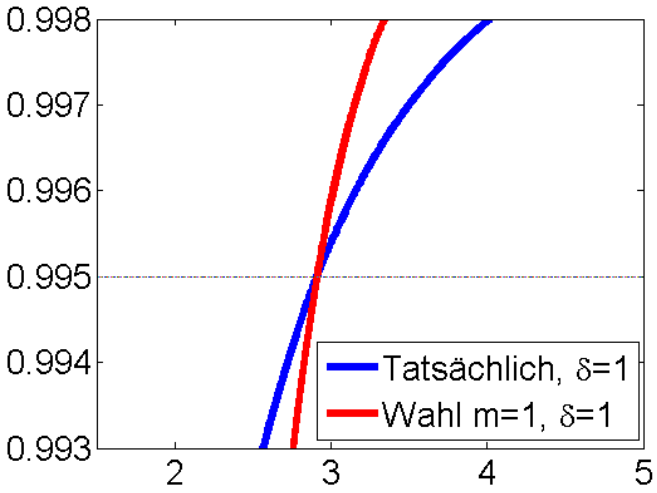
Es sind drei Versicherungsunternehmen VU1, VU2 und VU3 mit (statistisch gleichen) Risiken

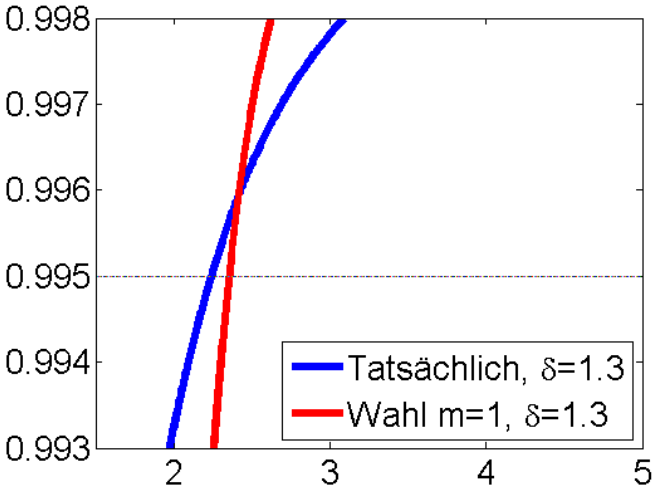
$$S_1, S_2, S_3 \sim S \sim \mathcal{LN}\left(0,33; 0,48^2\right) \text{ mit } E(S) = 0,33,\ Var(S) = 0,48^2$$

und zugehöriger Prämie 0,7, 1 und 1,3 gegeben.

	VU1	VU2	VU3
m	0,47	0,33	0,25
Quantil	4,161	2,913	2,240
Quantil (QIS 5)	4,081	2,913	2,356
Abweichung	**0,080**	**0,000**	**-0,115**
Abweichung	**1,9%**	**0,0%**	**-5,2%**
SCR	2,213	1,913	1,613
SCR (QIS 5)	2,157	1,913	1,763
Abweichung	**0,056**	**0,000**	**-0,150**
Abweichung	**2,5%**	**0,0%**	**-9,3%**


0.998
0.997
0.996
0.995
0.994
0.993
2
3
4
5
Tatsächlich, δ=0.7
Wahl m=1, δ=0.7


0.998
0.997
0.996
0.995
0.994
0.993
2
3
4
5
Tatsächlich, δ=1
Wahl m=1, δ=1


0.998
0.997
0.996
0.995
0.994
0.993
2
3
4
5
Tatsächlich, δ=1.3
Wahl m=1, δ=1.3

Es liegt eine

- **systematische Unterschätzung** des SCR beim gefährdeteren Unternehmen vor.('Begnadigung')
- **systematische Überschätzung** des SCR beim am sichersten gestellten Unternehmen vor. ('Bestrafung')

Dies ist **ungerecht** im Sinne einer harmonisierten Risikobewertung. Allerdings sind die Verschätzungen **gering**.

Beispiel (Fortsetzung)

Die Gegebenheiten sind wie zuvor, allerdings mit den Parametern $E(S) = 0,9$ und $Var(S) = 0,15^2$.

	VU1	VU2	VU3
m	1,286	0,900	0,692
SCR	0,660	0,360	0,060
SCR (QIS 5)	0,481	0,452	0,437
Abweichung	**0,178**	**-0,092**	**-0,377**
Abweichung	**27,0%**	**-25,7%**	**-630,8%**

Wieder liegt eine **ungerechte** Risikobewertung vor, allerdings mit **erheblicheren** Abweichungen.

Dieses Phänomen resultiert allein aus der Annahme „$m = 1$“.

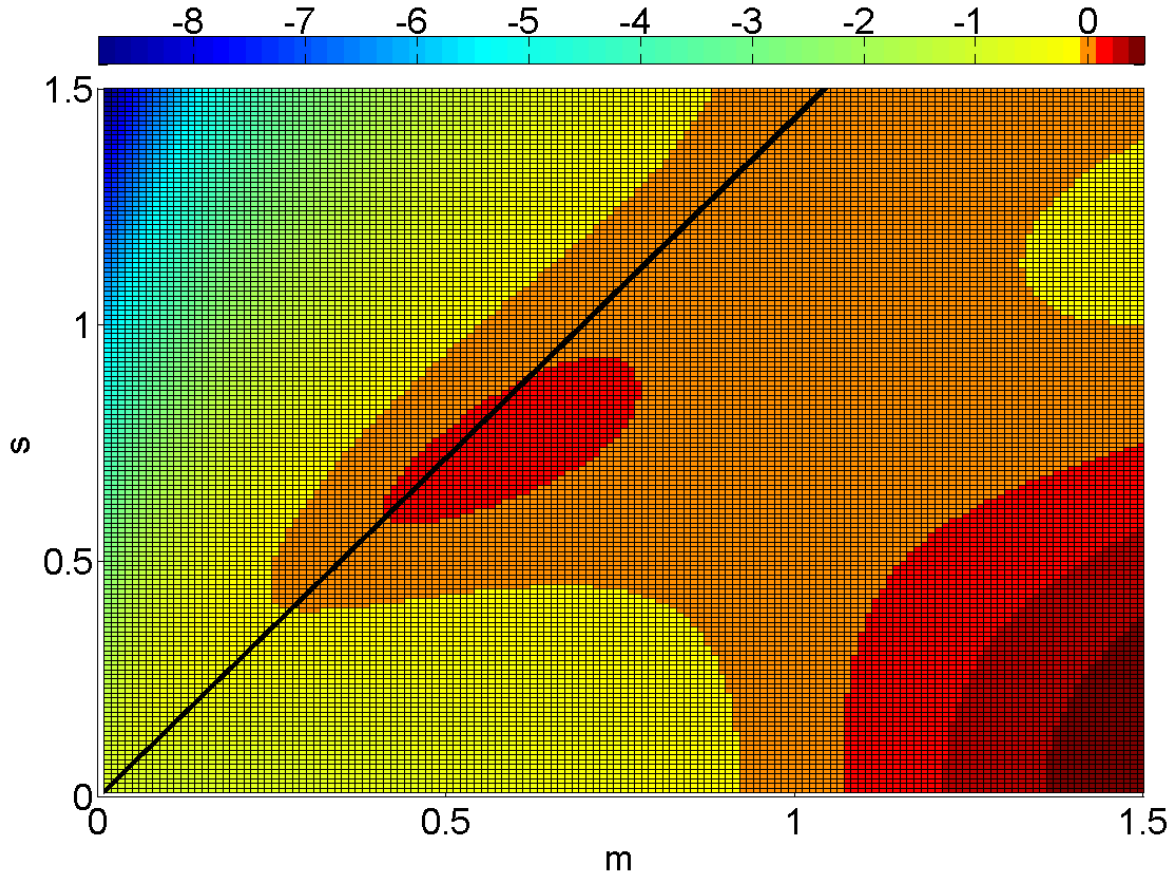


Abbildung: Quantildifferenz $F^{-1}_{m,s^2}(u) - F^{-1}_{1,s^2}(u)$

$$Q := \{(\tfrac{m}{\delta}, \tfrac{s}{\delta}) \mid \delta \in \mathbb{R}^+\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \tfrac{x_2}{x_1} = \tfrac{s}{m}\}$$

Grenzwerte

Beispiel (Fortsetzung)

Die Gegebenheiten sind wie zuvor, jedoch mit anderen Prämienvolumina.

	VU1	VU2	VU3
Prämienvolumen	0,001	1	1000
Quantil	1359,759	1,360	0,001
Quantil (QIS 5)	23,185	1,452	1,000
SCR	1,359	0,360	0
SCR (QIS 5)	0,022	0,452	0,386
Abweichung	**98,4%**	-25,7%	$-\infty$ **%**

Korrekturmöglichkeiten

- Man lässt die Annahme $m = 1$ fallen.
- Man definiert das Volumenmaß über $V := E(S)$ mit S als Gesamtschaden und $X = \frac{S}{V}$ Schadenquote.
- Man verwendet eine geeignete Größe $\tilde{s}^2$ statt s^2 in TS.SCR.10 „Undertaking-Specific Parameters“ so, dass das richtige Quantil berechnet wird.

Existiert eine solche Größe $\tilde{s}^2$ und wie berechnet man diese?

Satz

Sei X eine lognormalverteilte ZVe mit $E(X) = m \in \mathbb{R}^+$ und $Std(X) = s \in \mathbb{R}^+$, sowie $u \in (0,1)$, genau dann gilt

$$F^{-1}_{m,s^2}(u) = F^{-1}_{1,\tilde{s}^2}(u),$$

wenn

$$\tilde{s}^2 = \exp\left(\left(q_u \pm \sqrt{-2\ln\left(F^{-1}_{m,s^2}(u)\right) + q_u^2}\right)^2\right) - 1 \wedge \tilde{s}^2 \in \mathbb{R}.$$

Lemma

Für $(s,m) \in (0,1.5) \times (0,3)$ folgt $\tilde{s}^2 \in \mathbb{R}$.

Beispiel

Betrachtet wird das Unternehmen VU1 des anfänglichen Beispiels, einmal unter dem USP-Ansatz gemäß QIS 5 und einmal unter dem modifizierten Ansatz.

	Methode 1	Methode 2	Tatsächlicher Wert
m	1,00	1,00	0,47
s	0,69	0,70	0,69
μ	-0,19	-0,20	-1,32
σ	0,62	0,63	1,07
0.995-Quantil	4,0812	4,1609	4,1609
SCR	2,1568	2,2126	2,2126
Abweichung	0,0558	0,0000	
	2,5%	0,0%	

Zusammenfassung

- Die Annahme „m=1“ führt zu einem Bias, der entgegen einer intuitiven Vorstellung nicht konservativ ist.
- Im grundsätzlichen Standardansatz werden ohnehin feste Marktwerte vorgegeben.
- Im Fall unternehmensindividueller Parameter (USP) kann der Bias eliminiert werden, sofern $\tilde{s}^2$ statt der Varianz der Schadenquote als Parameter verwendet wird.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Referenzen I

[Bafin] *BaFin Homepage*. – URL http://www.bafin.de/DE/Unternehmen/VersichererPensionsfonds/Solvency2/solvency2__node.html. – Zugriff 12.11.2010

[lvl2l] *CEIOPS' Advice for Level Implementing Measures on Solvency II: SCR Standard Formula Calibration of Non-life Underwriting Risk*

[European Commission Internal Market and Services DG, Financial Institutions 2008] European Commission Internal Market and Services DG, Financial Institutions (Veranst.): *QIS 4 Technical Specifications: Annex to Call Advice from CEIOPS on QIS 4*. March 2008. – URL: www.ceiops.eu/content/view/118/124/

[European Commission Internal Market and Services DG, Financial Institutions 2010] European Commission Internal Market and Services DG, Financial Institutions (Veranst.): *Technical Specifications for QIS 5*. July 2010. – http://ec.europa.eu

Referenzen II

[Hampel] HAMPEL, Martin: *Prämienrisiko und Eigenmittelanforderung in Solvency II*. – forthcoming paper

[I.N. Bronstein] I.N. BRONSTEIN, G. Musiol H. M.: *Taschenbuch der Mathematik*. 6. Verlag Harri Deutsch

[Sandström 2006] SANDSTRÖM, Arne: *Solvency - Models, Assessment and Regulations*. Chapman & Hall/CRC, 2006

Kontakt

Martin Hampel
Carl von Ossietzky Universität
Institut für Mathematik
Carl-von-Ossietzky-Straße 9-11, 26111 Oldenburg
Tel.: +49 441 798 3216
Martin.Hampel@uni-oldenburg.de