Karlsruher Institut für Technologie

Dynamische Optimierung von limitierter XL-Rückversicherung und Investment

Alireza Edalati Christopher Henke

Lehrstuhl für Versicherungswissenschaft

Inhalt

Einleitung
Motivation
Modell
- Risikomodell
- Investment
- Limitierte XL RV

HJB-Gleichung und ihre Eigenschaften
- Verifikationslemma
- Eigenschaft der HJB
- Existenz einer Lösung

Numerische Betrachtung
Ergebnisse

Einleitung

- Browne (1995)
  - Wertfunktion: Minimieren der Ruinwahrscheinlichkeit
  - Kontrollproblem: optimales Investment
  - Preisprozess der Aktie: Geometrische Brownsche Bewegung
  - Risikoreserveprozess: Wiener-Prozess
  - Optimale Anlagestrategie: unabhängig vom StartKkapital
- Hipp und Plum (2000)
  - Kontrollproblem: optimales Investment
  - Risikoreserveprozess: Lundberg
  - Optimale Anlagestrategie: abhängig von Startkapital

Einleitung

- Schmidli (2002)
  - Kontrollproblem: Optimales Investment und proportionale RV
  - Risikoreserveprozess: Lundberg
  - Optimale Anlagestrategie: abhängig von Startkapital
- Vogt (2003)
  - Kontrollproblem: optimale RV
- ...

Motivation

- Praxis: es gibt eine maximale Haftungsstrecke für Rückversicherer
- Theorie:
  - Existenz einer Lösung?
  - Wertefunktion?
  - Optimale Strategie?

Outline

Einleitung
Motivation
Modell
- Risikomodell
- Investment
- Limitierte XL RV

HJB-Gleichung und ihre Eigenschaften
- Verifikationslemma
- Eigenschaft der HJB
- Existenz einer Lösung

Numerische Betrachtung
Ergebnisse

Risikomodell

- Risikoreserveprozess (Lundberg)

$$X_t = s + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i.$$

  - s: Startkapital
  - c: Prämienintensität
  - N_t: Homogener Poisson-Prozess mit Intensität λ
  - Y_i: Schadenshöhen, unabhängige identisch verteilte Zufalsvariablen.
  - $N_t \perp Y_i$

Outline

Einleitung
Motivation
Modell
- Risikomodell
- Investment
- Limitierte XL RV

HJB-Gleichung und ihre Eigenschaften
- Verifikationslemma
- Eigenschaft der HJB
- Existenz einer Lösung

Numerische Betrachtung
Ergebnisse

Invetment

- Investment: Preisprozess Z_t

$$dZ_t = aZ_t dt + bZ_t dW_t,\ a, b > 0$$

  - a: Drift
  - $b > 0$: Diffusionsterm
  - W_t: Wienerprozess

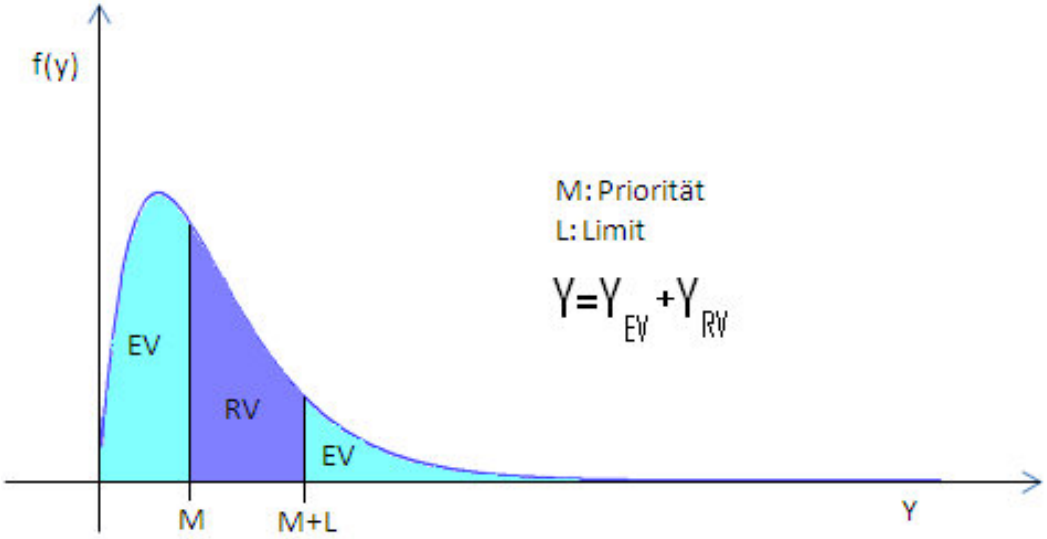
Outline

Einleitung
Motivation
Modell
- Risikomodell
- Investment
- Limitierte XL RV

HJB-Gleichung und ihre Eigenschaften
- Verifikationslemma
- Eigenschaft der HJB
- Existenz einer Lösung

Numerische Betrachtung
Ergebnisse

Limiterte XL RV



- Die Risikoteilung wird durch $g(Y, M, L) := Y_{EV} = Y \wedge M + (Y - M - L)^{+}$definiert.
- Rückversicherungsprämien: $h(M, L) = \lambda\rho \int_{M}^{M+L} \overline{F}(y)\, dy$
  - ρ: Sicherheitszuschlag
  - $\overline{F}(y) = \Pr(Y > y)$: Tailwahrscheinlichkeit

Kontrollierter Risikoreserveprozess

Sei A_t der Betrag der in die Aktie zum Zeitpunkt t investiert wird. Dann gilt:

$$X_t^{AML} = s + ct - \int_0^t h\left(M_v, L_v\right) dv + \int_0^t aA_v dv + \int_0^t b^2 A_v dW_t$$
$$- \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \wedge M_{T_i} + \left(Y_i - M_{T_i} - L_{T_i}\right)^+$$

Der Ruinzeitpunkt

$$\tau^{AML} = \inf\left\{t \geq 0 : \; X_t^{AML} < 0\right\}$$

Ruinwahrscheinlichkeit

$$\psi^{AML}\left(s\right) = \Pr\left\{\tau^{AML} < \infty\right\}$$

- Zum Zeitpunkt t gilt die in t^- gewahlte Strategie.
- $\left(A, M, L\right)$ konnen vom Erstversicherer kontrolliert werden.
- Die Strategie $\left(A, M, L\right)$ kann vom EV jederzeit neu gewahlt werden.

HJB-Gleichung

Alternativ zur Ruinwahrscheinlichkeit kann auch die Überlebenswahrscheinlichkeit

$$\delta^{AML}(s) = 1 - \psi^{AML}(s) = \Pr\left\{\tau^{AML} = \infty\right\}$$

betrachtet werden. Für eine maximierende Wertfunktion $V(s)$, lautet die HJB Gleichung für $s \geq 0$ wie folgt:

$$\sup_{A,M,L} \mathcal{L}_{A,M,L} V(s) \stackrel{!}{=} 0.$$

Wobei

$$\mathcal{L}_{A,M,L} V(s) \stackrel{!}{=} \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} E\left[V\left(X_{t+h}^{AML}\right) - V(s) \mid X_t^{AML} = s\right]$$

HJB-Gleichung

Für den Risikoreserveprozess X_t^{AML} gilt

$$0 = \sup_{M,L,A} \left\{ \lambda E \left[\delta \left(s - \left(Y \wedge M + (Y - M - L)^+ \right) \right) - \delta(s) \right] \right.$$

$$\left. + (c - h(M, L) + Aa)\, \delta'(s) + \frac{1}{2} b^2 A^2 \delta''(s) \right\}$$

Randbedingungen

- $\delta(s) = 0 \;\; mit \;\; s < 0$
- $\delta(\infty) = 1$

man kann beweisen, dass $\delta'(s) > 0$ und $\delta''(s) < 0$. Wenn der Überschuss $s = 0$ ist,

$$A^*(0) = 0.$$

Outline

Einleitung
Motivation
Modell
- Risikomodell
- Investment
- Limitierte XL RV

HJB-Gleichung und ihre Eigenschaften
- Verifikationslemma
- Eigenschaft der HJB
- Existenz einer Lösung

Numerische Betrachtung
Ergebnisse

Verifikationslemma

Seien $V(s)$ eine hinreichend glatte Losung der HJB mit $V(s)$ für $s < 0$ und $V(\infty) = 1$ und (A^*, M^*, L^*) der Minimierer der HJB. Dann gilt bei einer beliebigen zulässigen dynamischen Rückversicherungsstrategie (A, M, L) und dem zugehörigen Risikoreserveprozess X_t^{AML} mit $X_0^{AML} = s$:

$$V(s) \geq \Pr\left\{X_t^{AML} \geq 0,\ \textit{für alle}\, t \geq 0\right\},$$

wobei die Gleichheit für die optimale Strategie (A^*, M^*, L^*) gilt.

Verifikationslemma

Sei τ^* und τ jeweils der Ruinzeitpunkt für $X\left(s+\varepsilon,\left(A^*,M^*,L^*\right),t\right)$ und $X\left(s,\left(A,M,L\right),t\right)$. Sei $A_1\left(t\right)=A\left(t\right)+\varepsilon^2$, τ_1 und $\delta_1\left(s\right)$ sind entsprechender Ruinzeitpunkt und Überlebenswahrscheinlichkeit mit der Strategie $\left(A_1,M,L\right)$ und dem Anfangskapital $s+\varepsilon$. Wir haben

$$X\left(s+\varepsilon,\left(A_1,M,L\right),t\right)=X\left(s,\left(A,M,L\right),t\right)+\varepsilon+a\varepsilon^2t+b\varepsilon^2W\left(t\right),$$

$$\Pr\left\{\tau_1<\tau\right\}\leq\exp\left(-\frac{2a^2}{b^2\varepsilon}\right).$$

$X\left(s+\varepsilon,\left(A_1,M,L\right),t\right)\to\infty$ für $\tau=\infty$.

Verifikationslemma

Nach Ito's Formel,

$$E\left[\delta^*\left(X^*_{t\wedge\tau^*}\right)\right] = \delta^*\left(s+\varepsilon\right) + E\left[\int_0^{t\wedge\tau^*} bA^*_s\delta^{*'}\left(X^*_s\right)dW_s\right]$$

$\left\{\delta^*\left(X^*_{t\wedge\tau^*}\right)\right\}$ ist ein Martingal und $\left\{\delta\left(X_{t\wedge\tau_1}\right)\right\}$ ist ein Supermartingal, also $E\left[\delta\left(X_{t\wedge\tau_1}\right)\right] \leq \delta^*\left(s+\varepsilon\right) = E\left[\delta^*\left(X^*_{t\wedge\tau^*}\right)\right]$ für alle $t > 0$. Für $t \to \infty$

$$\delta^*\left(s+\varepsilon\right) \geq \Pr\left\{\tau = \infty \, and \, \tau_1 = \infty\right\}$$

$$\geq \delta\left(s\right) - \Pr\left\{\tau_1 < \tau\right\} \geq \delta\left(s\right) - \exp\left(-\frac{2a^2}{b^2\varepsilon}\right)$$

Mit $\varepsilon \to 0$haben wir $\delta^*\left(s\right) \geq \delta\left(s\right)$.

Outline

Einleitung
Motivation
Modell
- Risikomodell
- Investment
- Limitierte XL RV

HJB-Gleichung und ihre Eigenschaften
- Verifikationslemma
- Eigenschaft der HJB
- Existenz einer Lösung

Numerische Betrachtung
Ergebnisse

HJB-Gleichung

Wenn $\delta^{''}(s) < 0$, lautet die optimale Anlagestrategie folgendermaßen

$$A^*(s) = -\frac{a\delta^{'}(s)}{b\delta^{''}(s)}.$$

Und Weil $A^*(0) = 0 \;\Rightarrow \delta^{''}(0) = -\infty$

Das optimale A ersetzen,

$$0 = \sup_{M,L}\left\{\left(c + \frac{1}{2}A(s) - h(M,L)\right)\delta^{'}(s) + \lambda E\left[\delta\left(s - \left(Y \wedge M + (Y - M - L)^{+}\right)\right) - \delta(s)\right]\right\}.$$

$$\Rightarrow -\frac{\delta^{''}(s)}{\delta^{'}(s)^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}\inf\limits_{M,L}\left\{\lambda E\left[\delta\left(s - \left(Y \wedge M + (Y - M - L)^{+}\right)\right) - \delta(s)\right] - (c - h(M,L))\,\delta^{'}(u)\right\}}$$

HJB-Gleichung

integrieren

$$\delta^{'}(s) = \left(\frac{1}{2}\int_0^s \frac{1}{I(u)}\,du + \frac{1}{\delta^{'}(0)}\right)^{-1}.$$

$$I(u) = \inf_{M,L}\left\{\lambda\left[\delta(0)\,\bar{F}(u+L) + \int_{u-M}^{u}\delta^{'}(x)\,\overline{F}(u-x)\,dx + \int_{0}^{u-M}\delta^{'}(x)\,\overline{F}(u-x+L)\,dx\right] - (c-h(M,L))\,\delta^{'}(u)\right\}.$$

- $\lambda := \lambda\frac{b^2}{a^2}$ und $c := c\frac{b^2}{a^2}$

wegen

$$\delta(s) = 1 - \int_s^{\infty}\delta^{'}(u)\,du,$$

ist die HJB-Gleichung

$$\delta^{'}(s) = \inf_{M,L}\left\{\frac{\lambda E\left[\delta(s) - \delta\left(s - \left(Y\wedge M + (Y-M-L)^{+}\right)\right)\right]}{c + \frac{1}{2}A(s) - h(M,L)}\right\}.$$

HJB-Gleichung

Es gibt drei Möglichkeiten für $M^*(s)$, wie das Infimum angenommen werden kann.

- $M^*(s) > s \Rightarrow$Keine Rückversicherung.
- $M^*(s) = s \Rightarrow$ Normalengleichung ist wie folgt

$$\rho\delta'(s) = \delta(0)\frac{f(s+L)}{\overline{F}(s+L)}$$

- $M^*(s) < s \Rightarrow$Normalengleichung ist wie folgt

$$\rho\delta'(s) = \delta'(s - M^*(s))$$

$$\rho\overline{F}(M+L)\delta'(s) = \delta(0)f(s+L) + \int_{M+L}^{s+L} \delta'(s-y+L)f(y)\,dy$$

HJB-Gleichung

- $s = 0$.

$$\frac{\delta^{'}(0)}{\delta(0)} = \inf_{L \geq 0} \left\{ \frac{\lambda \overline{F}(L)}{c - \lambda\rho \int_0^L \overline{F}(y)\, dy} \right\}.$$

Ist $\delta(s)$ eine Lösung von HJB, so ist auch für jede Konstante α die Funktion $\alpha\delta(s)$ eine Lösung. Zur Vereinfachung verwende ich die Normierung $V(0) = 1$ und definiere

$$a = V^{'}(0) = \inf_{L \geq 0} \left\{ \frac{\lambda \overline{F}(L)}{c - \lambda\rho \int_0^L \overline{F}(y)\, dy} \right\}$$

Lemma 1. Angenommen es existiert eine Lösung $V(s)$ für die HJB-Gleichung auf einem Interval $[0, \eta)$ mit $\eta > 0$, dann existiert für jedes feste ρ ein ε sodass $M^*(s) = s$ für $s < \varepsilon$.
Beweis erfolg durch Wiederspruch:

$$\rho V^{'}(s) = V^{'}(s - M^*(s))$$

Lemma 2. Angenommen es existiert eine Lösung $V(s)$ für die HJB-Gleichung auf einem Interval $[0, \infty)$, dann $M^*(s_2) \leq s_2 - s_1 + M^*(s_1)$ für $s_1 \leq s_2$.

Outline

Einleitung
Motivation
Modell
- Risikomodell
- Investment
- Limitierte XL RV

HJB-Gleichung und ihre Eigenschaften
- Verifikationslemma
- Eigenschaft der HJB
- Existenz einer Lösung

Numerische Betrachtung
Ergebnisse

Existenz einer Lösung

Theorem

Angenommen F hat eine beschränkte Dichte, dann existiert ein $\epsilon > 0$ *und eine Funktion* $V(x)$ *auf* $[0, \epsilon)$ *welche die HJB-Gleichung löst. Darüber hinaus gilt,* $V'(u) = V'(0) - \frac{V'(0)}{\sqrt{(c-h(0,L^*(0)))}}\sqrt{u} + o\left(\sqrt{u}\right)$ *für* $u \to 0$.

Proof: für kleine s erhalten wir mit lemma (1)

$$V'(u) = \frac{1}{\frac{1}{2}\int_0^u \frac{1}{\inf\limits_L \left\{\lambda\left[\bar{F}(t+L)+\int_0^t V'(z)\overline{F}(t-z)dz\right]-(c-h(t,L))V'(t)\right\}}dt + \frac{1}{a}}.$$

Beweis

$R_\epsilon = \{k \in C[0,\epsilon] : Q_\epsilon(k) < \infty\}, \epsilon < 1$ mit Norm
$Q_\epsilon(k) = \sup\limits_{0<u<\epsilon} \frac{|k(0)-k(u)|}{u}$ ist ein Banachraum.

$D_M = \left\{k \in R_\epsilon : k(0) = \frac{a}{\sqrt{(c-h(0,L^*(0)))}},\ Q_\epsilon[k] \leq M\right\}$ ist ein Abgeschlossener Teilraum von R_ϵ. definieren wir $k(x) = \frac{a-V'(x^2)}{x}$ und den Operator

$$T(k)(u) = \frac{\int_0^u \frac{1}{\phi[k](t)}dt}{u} \frac{a}{\int_0^u \frac{1}{\phi[k](t)}dt + \frac{1}{a}}$$

Wobei

$$\phi[k](t) = 2\lambda t \int_0^1 z(a - tzk(tz))\,\overline{F}\left(t^2 - t^2z^2\right)dz + \inf_L \left\{\lambda \frac{\bar{F}(t^2+L)}{t} - \frac{1}{t}\left(c - h\left(t^2, L\right)\right)(a - tk(t))\right\}.$$

$T(K)(u)$ bildet $D_M$auf D_M ab und ist eine Kontraktion.

Existenz einer Lösung

Theorem

Angenommen F hat eine beschränkte Dichte, dann existiert eine eindeutige streng monoton fallende Lösung für die HJB-Gleichung auf $[0, \infty)$.

Beweis.

Der Beweis dieses Lemmas ist analog zu dem Beweis von Satz 2 von Schmidli 2002. □

Numerische Lösung

Löse:

$$
\begin{aligned}
0 &= \sup_{A,M,L} \left\{ \lambda E\left[V(s) - V(s - g(X,M,L))\right] \right. \\
&\quad \left. - \left(c - h(M,L) + A\right) V'(s) + \frac{1}{2} A^2 V''(s) \right\}
\end{aligned}
$$

mit $A(s) = -\frac{V'(s)}{V''(s)}$

Problem dabei: $V''(0) = \infty$ und numerische Methode somit nicht direkt ansetzbar.

Vorgehensweise für kleines Kapital

Ansatz:
Für kleines s gilt M=s.
Für $L > 0$ ist somit das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
V'(s) &= \lambda \inf_{M,L} \frac{E\left[V(s) - V(s - g(X, M, L))\right]}{c + \frac{1}{2}\sqrt{U(s)} - h(M, L)} \\
\frac{1}{4} U'(s) &= c - h(s, L) \\
&\quad + \sqrt{U(s)} \left(\lambda + \frac{1}{2} - \lambda \rho \overline{F}(s) - \frac{\lambda}{V'(s)} \int_0^s V'(s - x) f(x)\, dx \right)
\end{aligned}
$$

zu lösen.
Daraus ergeben sich die Strategien für kleine Kapitalbereiche.

Generelle Vorgehensweise

Gegeben: V, V', V'', M, L für kleines Kapital.

- Setze $V'(s+\Delta) = V'(s) + \Delta V''(s)$
- Setze $V(s+\Delta) = V(s) + \Delta V'(s)$, berechne $M(s), L(s)$
- Berechne
  $$V''(s+\Delta) = \frac{-V'(s+\Delta)^2}{2 \inf\limits_{M,L} \{E[V(s+\Delta) - V(s+\Delta - g(X,M,L))] - (c - h(M,L))V'(s+\Delta)\}}$$
- Wiederhole Obiges für den gesamten zu untersuchenden Kapitalbereich $[2 * \Delta, ..., K * \Delta]$
- Normiere $V(\cdot) / V(K)$

Problem dabei: Für hinreichend gute Diskretisierungen wird der Rechenaufwand sehr groß.

Frage: Gibt es alternative Lösungsmöglichkeiten?
Rekursiver Ansatz könnte Abhilfe schaffen.

Vereinfachung des Problems

Zunächst einmal Einschränkung des Problems auf die Berechnung von:

$$
\begin{aligned}
E\left[V\left(s-g\left(X,M,L\right)\right)\right] &= \int_0^M V\left(s-x\right) f\left(x\right) dx \\
&+ V\left(s-M\right) \mathbb{P}\left\{M < X < M+L\right\} \\
&+ \int_M^s V\left(s-x\right) f\left(x+L\right) dx \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

Vereinfachung des Problems

$$
\begin{aligned}
\ldots &= \sum_{i=1}^{m} v(k-i)p(i) \\
&+ v(k-m)pp(m<k<m+l) \\
&+ \sum_{i=m}^{k} v(k-i)p(i+l) + o(h)
\end{aligned}
$$

mit $k = 1, .., \mathcal{S}; m = 0, ..., \mathcal{M}; l = 1, .., \mathcal{L}$
p(i)=$\mathbb{P}\left\{(i-1)\Delta < X < i\Delta\right\}$
$v(i) = V(i\Delta)$
$pp(m<k<m+l) = \mathbb{P}\left\{m\Delta < X < (m+l)\Delta\right\}$

Herleitung der Rekursion

$$c\left(k,l,m\right) := \sum_{i=0}^{m} v\left(k-i\right) p\left(i+l\right)$$

Dann gilt: c(k,l,m)=c(k-1,l+1,m-1)+v(k)*p(l)

$$\mathbb{R}^{(k+1\times l)} \ni C\left(k\right) := \left(c\left(k,l,m\right)\right)_{m=0,\ldots,k;l=0,\ldots,\mathcal{L}}$$

C(k) lässt sich aus C(k-1) ableiten, wobei die Elemente der ersten Spalte $\left(c\left(k,\cdot,0\right)\right)$ und letzen Zeile $\left(c\left(k,\mathcal{L},\cdot\right)\right)$ von C(k) berechnet werden müssen.

Vergleich der ersten Ansätze

Vorteil des rekursiven Ansatzes: Zahl der Rechenoperationen verringert sich.

Nachteil des rekursiven Ansatzes: Auf Grund der Rekursion müssen immer alle Rückversicherungsstrategien betrachtet werden und nicht nur, wie im ersten Ansatz, alle zulässigen $(c > h(M, L))$.

Ergebnis: Je nach Verteilung und Diskretisierung ist der rekursive Ansatz schneller - wird für feinere Diskretisierungen aber wieder langsamer. Dies ist auf die Einschränkung des ersten Algorithmus' zurückzuführen.

Gibt es einen weiteren Ansatz?

Lokal optimale Methode

Mischung der beiden Ansätze.

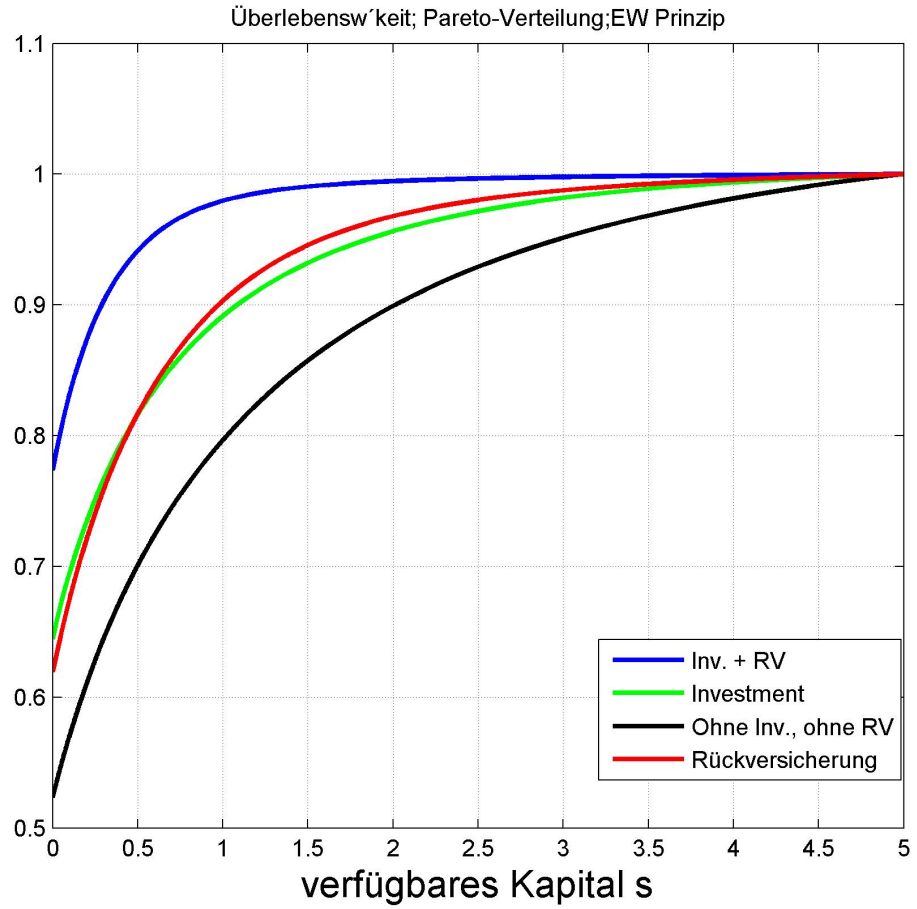
- Verwende zunächst die Rekursion, so lange bis $L < \infty$.
- Verwende ab dann lokal optimales Verfahren:
  Lege ein Band um $L(s)$ und betrachte nur Limite in diesem Band oder $L = \infty$.
- Mit Lemma 2 ergibt sich Einschränkung für M

Dadurch wird die Anzahl der benötigten Rechenoperationen verringert. Dieses Verfahren ist erwartungsgemäß schneller als die anderen beiden Ansätze - es liefert allerdings nur lokal optimale Lösungen, da die Stetigkeit des Limits vorrausgesetzt wird.

Paretoverteilung (1,3)

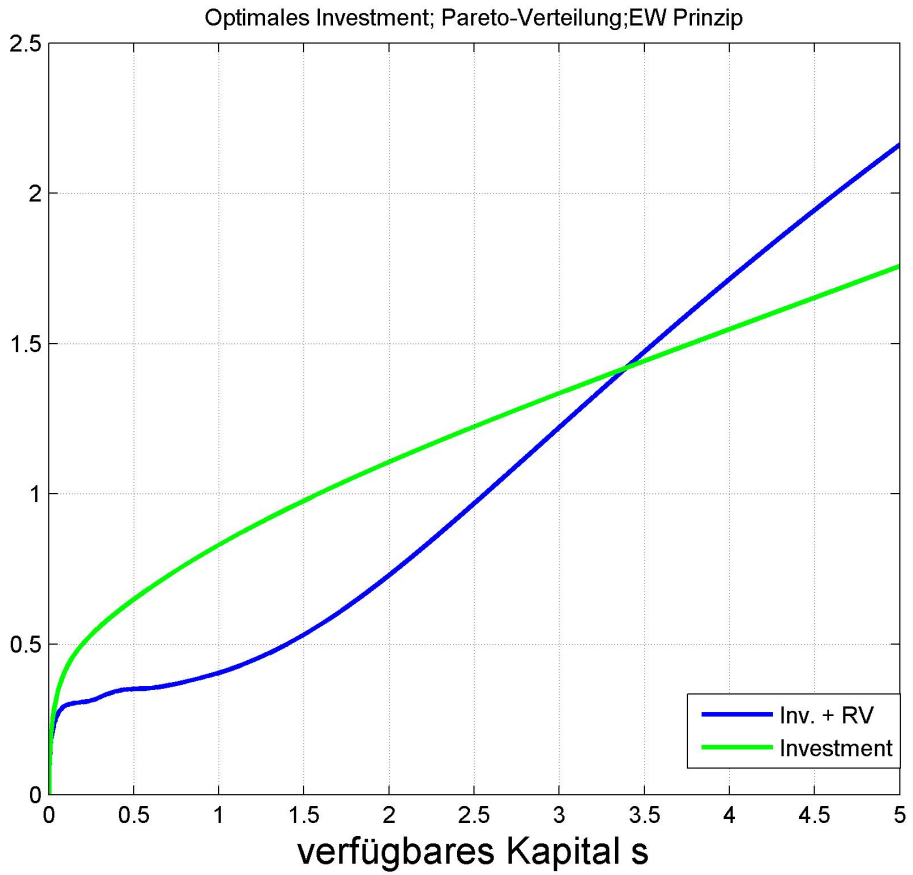
$\lambda = 1, c = 1, \rho = 3$

Überlebenswahrscheinlichkeit



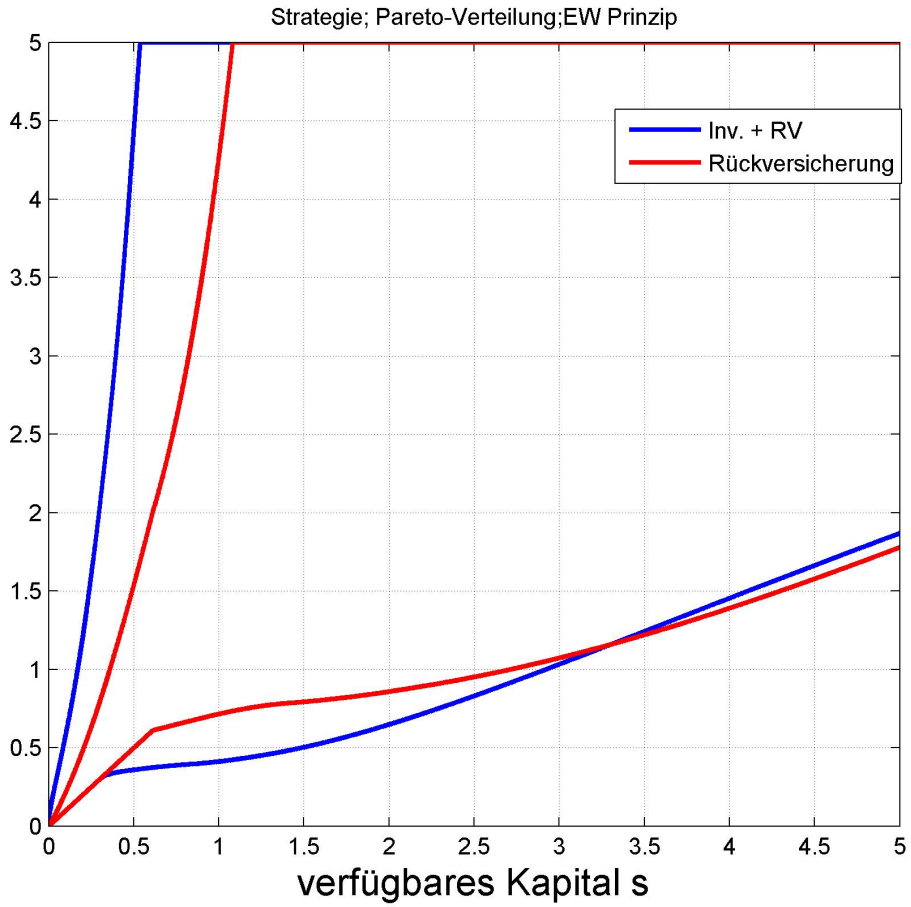
Paretoverteilung (1,3)

Optimales Investment



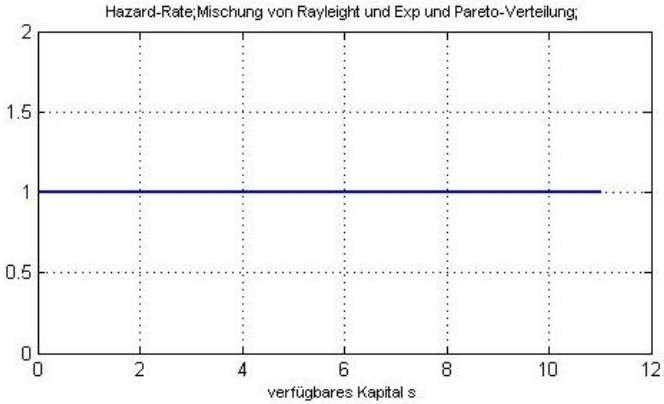
Paretoverteilung (1,3)

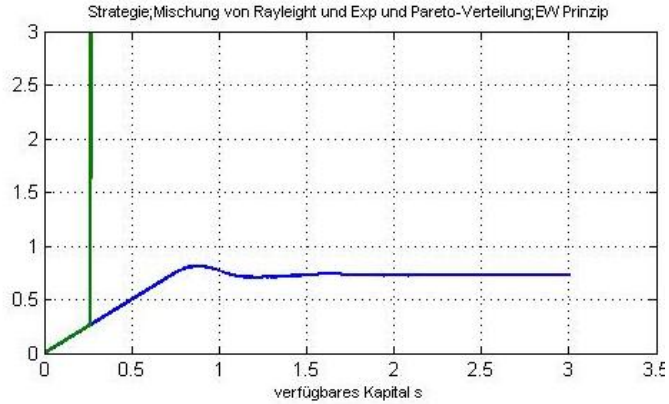
Optimale Rückversicherungsstrategie

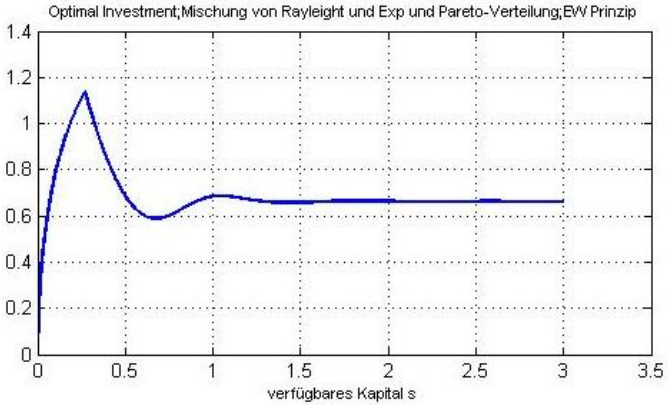


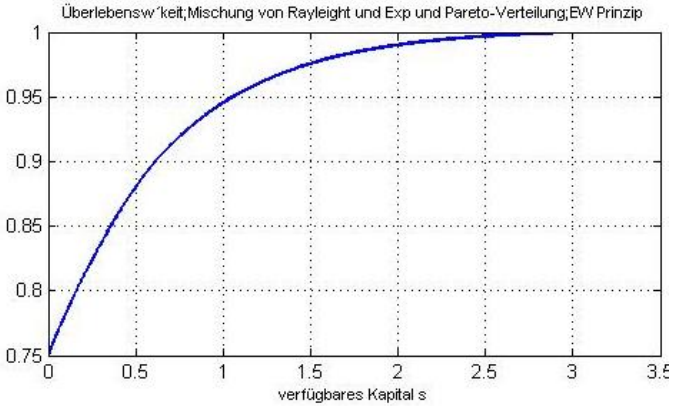
Exponentialverteilung

$\lambda = 1, c = 2, \rho = 3, a = b = 1, \beta = 1$





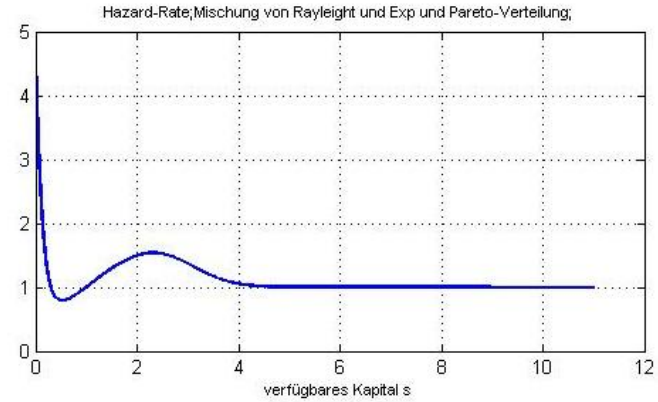


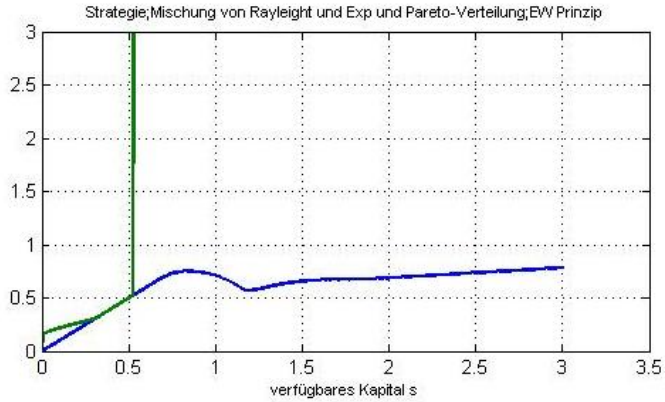


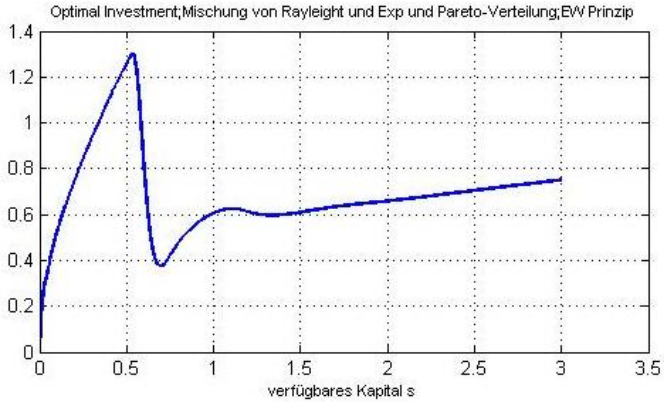
Mischung

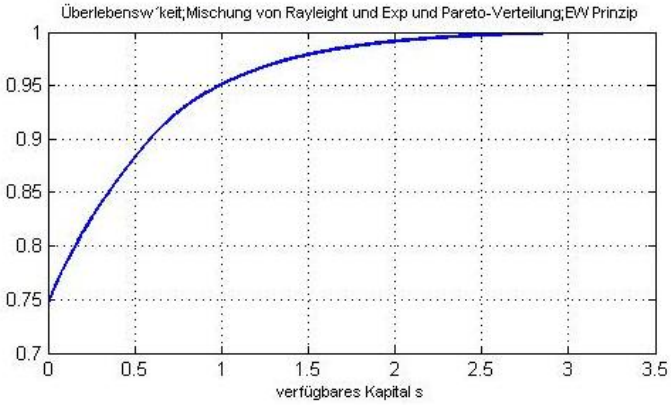
Exponential-, Pareto- und Raleighverteilung

$$f(y) = p_1 q (1+y)^{-(q+1)} + p_2 \beta e^{-\beta y} + p_3 \frac{y}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, p > 1, \sigma > 0$$
$$\lambda = 1, c = 1.44, \rho = 3, a = b = 1, q = 10, \beta = 1, \sigma = 1, p_{1=0.4}, p_2 = p_3 = 0.3$$









Ausblick

- Andere Prämienprinzipien (bsp. Varianzprinzip)
- Betrachtung weiterer Schadenhöhenverteilungen
- Konvergiert die optimale Priorität?
- Konvergiert das optimale Limit?
- Wenn $L(s_0) = \infty$ optimal ist $\Rightarrow L(s) = \infty$, $s > s_0$ optimal
- Optimales Investment ohne Nebenbedingungen

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

References

Vogt, M.
Optimale dynamische Ruckversicherung ein kontrolltheoretischer Ansatz.
University of Karlsruhe, 2003.

Hipp, C. AND Plum, M.
Optimal investment for insurers .
Insurance:Math. Econom. 27:215-228, 2000.

Browne, S.
Optimal investment policies for a firm with a random risk process: exponential utility and minimizing the probability of ruin .
Math Operations Res. pp.937-958, 1995.

Schmidli, H.
On minimising the ruin probability by investment and reinsurance .
Appl. Probab. 2002.