Modellierung und Risikomanagement von Abschnittsgarantien in kapitalbildenden Lebensversicherungen

Tagung Fachkreis Versicherungsmathematik

Klaus Sandmann

Universität Bonn

Bremen, 21. November 2012

Garantieverzinsung

- "Lebensversicherung auf der Kippe" (Handelsblatt 6.11.2012)
- "Bestehe die Gefahr eines Runs - eines Wettlaufs aus den Policen?" (Bundesfinanzministeriums laut Handelsblatt 6.11.2012)
- Die Pleite einer größeren Versicherung könnte das Finanzsystem insgesamt gefährden. (MCC)

... Und an allem ist die Garantieverzinsung Schuld?

Garantieverzinsung

- "Lebensversicherung auf der Kippe" (Handelsblatt 6.11.2012)
- "Bestehe die Gefahr eines Runs - eines Wettlaufs aus den Policen?" (Bundesfinanzministeriums laut Handelsblatt 6.11.2012)
- Die Pleite einer größeren Versicherung könnte das Finanzsystem insgesamt gefährden. (MCC)

... Und an allem ist die Garantieverzinsung Schuld?

Garantieverzinsung

The Economist: 3.11.2012

- Around 70% of American retirement schemes are now defined-contribution (DC) plans.
- But the risk also makes pensions a very unsatisfactory product for employees. They put money aside every month but have no idea how much they will receive.
- But if a guarantee could be provided for low-risk DC schemes, workers might be persuaded to save more. And if they do not save more than they do now, they may end up relying on government benefits in any case.

Garantieverzinsung

The Economist: 3.11.2012

- Around 70% of American retirement schemes are now defined-contribution (DC) plans.
- But the risk also makes pensions a very unsatisfactory product for employees. They put money aside every month but have no idea how much they will receive.
- But if a guarantee could be provided for low-risk DC schemes, workers might be persuaded to save more. And if they do not save more than they do now, they may end up relying on government benefits in any case.

Fragen an die Produktgestaltung

- Ist die staatliche Förderung von DC-Verträgen z.B. durch steuerliche Berücksichtigung aus volkswirtschaftlicher Sicht noch zielfördernd und gerechtfertigt?
- Stellen unverbindliche Zahlungsprognosen einen ausreichenden und tragfähigen Anreiz für die individuelle Vorsorgeentscheidung und Anstrengung dar?

Diskussionspunkte

- Defined Contribution oder Defined Benefit
- Zinsgarantien: Deterministisch bis Stochastisch
- Überschussbeteiligung: nicht-lineare Formen
- Prämienprinzip: Zulässige Vertragsformen
- Fondsgebundener Renten- und Kapitallebensversicherung
- Schlussfolgerung

	t_0	t_1	$\ldots\ t_{N-1}$	$T = t_N$	t_{N+1}	$\ldots$	t_M	$\ldots$
Risikolebensvers.		$G_l(t)$						
Kapitalversicherung				$G_l(t_N)$				
Rentenversicherung				$Q(t_N)$	$Q(t_{N+1})$	$\cdots$	$Q(t_M)$	$\cdots$

Defined Contribution versus Defined Benefit

- Defined Contribution Versicherungsformen nehmen in der Bedeutung zu
- und verlagern die meisten finanziellen Risiken auf den Versicherungsnehmer, der diese nicht bewältigen kann.
  - Kursrisiken, Zinsrisiken, Inflationsrisiko ...

	t_0	t_1	$\ldots$ t_{N-1}	$T = t_N$	t_{N+1}	$\ldots$	t_M	$\ldots$
Risikolebensvers.		$G_I(t)$						
Kapitalversicherung				$G_I(t_N)$				
Rentenversicherung				$Q(t_N)$	$Q(t_{N+1})$	$\cdots$	$Q(t_M)$	$\cdots$

Defined Contribution versus Defined Benefit

- Defined Contribution Versicherungsformen nehmen in der Bedeutung zu
- und verlagern die meisten finanziellen Risiken auf den Versicherungsnehmer, der diese nicht bewältigen kann.
    - Kursrisiken, Zinsrisiken, Inflationsrisiko ...

Lösungsansatz

Defined–contribution plus Minimum–Defined–Benefit als nicht-lineare Form von Versicherungsleistung sowie Zins- oder Kapitalgarantie

Risikobegrenzung?

Die Risikobegrenzung beruht auf der gleichzeitigen Berücksichtigung der beiden Prinzipien:

- Versicherungsprinzip, d.h. der Diversifikation im Kollektiv, der Zeit, ...
- Finanzmarktprinzip, d.h. dem dynamischen Hedging auf der Grundlage von No-Arbitrage

Lösungsansatz

Defined–contribution plus Minimum–Defined–Benefit als nicht-lineare Form von Versicherungsleistung sowie Zins- oder Kapitalgarantie

Risikobegrenzung?

Die Risikobegrenzung beruht auf der gleichzeitigen Berücksichtigung der beiden Prinzipien:

- Versicherungsprinzip, d.h. der Diversifikation im Kollektiv, der Zeit, ...
- Finanzmarktprinzip, d.h. dem dynamischen Hedging auf der Grundlage von No-Arbitrage

zeitliche Dimension

- periodische Zinsgarantie: kein Ausgleich in der Zeit
- durchschnittliche Zinsgarantie: Ausgleich in der Zeit

Überschussbeteiligung: Konstruktionsprinzip

- Direktüberschussbeteiligung: perodische Berechnung

$$\begin{aligned} & \textit{Garantiezins} \\ + \quad & \alpha \cdot \max\{\text{period. } \textit{ex post Rendite} - \textit{Garantiezins}; 0\} \end{aligned}$$

  unmittelbare Rückvergütung oder Ansammlung

- Schlussüberschussbeteiligung

$$\begin{aligned} & \textit{Garantiezins} \\ + \quad & \alpha \cdot \max\{\triangle \textit{ ex post Rendite} - \textit{Garantiezins}; 0\} \end{aligned}$$

zeitliche Dimension

- periodische Zinsgarantie: kein Ausgleich in der Zeit
- durchschnittliche Zinsgarantie: Ausgleich in der Zeit

Überschussbeteiligung: Konstruktionsprinzip

- Direktüberschussbeteiligung: perodische Berechnung

$$\begin{aligned} & \textit{Garantiezins} \\ + \quad & \alpha \cdot \max\{\text{period. } \textit{ex post Rendite} - \textit{Garantiezins}; 0\} \end{aligned}$$

unmittelbare Rückvergütung oder Ansammlung

- Schlussüberschussbeteiligung

$$\begin{aligned} & \textit{Garantiezins} \\ + \quad & \alpha \cdot \max\{\triangle \textit{ ex post Rendite} - \textit{Garantiezins}; 0\} \end{aligned}$$

zeitliche Dimension

- periodische Zinsgarantie: kein Ausgleich in der Zeit
- durchschnittliche Zinsgarantie: Ausgleich in der Zeit

Überschussbeteiligung: Konstruktionsprinzip

- Direktüberschussbeteiligung: perodische Berechnung

$$\begin{array}{ll} & \textit{Garantiezins} \\ + & \alpha \cdot \max\{\text{period. } \textit{ex post Rendite} - \textit{Garantiezins}; 0\} \end{array}$$

  unmittelbare Rückvergütung oder Ansammlung

- Schlussüberschussbeteiligung

$$\begin{array}{ll} & \textit{Garantiezins} \\ + & \alpha \cdot \max\{\triangle\ \textit{ex post Rendite} - \textit{Garantiezins}; 0\} \end{array}$$

	t_0	t_1	$\ldots$	t_{N-1}	$t_N = T$	
Vermögen:	$S(t_0)$	$S(t_1)$		$S(t_{N-1})$	$S(t_N)$	stochastisch
Prämie:	$K(t_0)$	$K(t_1)$	$\cdots$	$K(t_{N-1})$		deterministisch

$\longmapsto$ Prämiensequence $\longleftarrow$

Prämienaufteilung: $K(t_i) > 0$

Risikoanteil:	$\alpha \in [0,1]$:	$\alpha \cdot K(t_i)$
Versicherungsanteil:	$(1-\alpha) \in [0,1]$:	$(1-\alpha) \cdot K(t_i)$

	t_0	t_1	$\ldots$	t_{N-1}	$t_N = T$	
Vermögen:	$S(t_0)$	$S(t_1)$		$S(t_{N-1})$	$S(t_N)$	stochastisch
Prämie:	$K(t_0)$	$K(t_1)$	$\cdots$	$K(t_{N-1})$		deterministisch

$\longmapsto$ Prämiensequence $\longleftarrow$

Ablaufvermögen versus Garantieleistung $t > 0$

$$n^*(t) := min\{n-1, \max\{j \in \mathbb{N}_0 | t_j < t\}\}$$

$$\text{Ablaufvermögen} \quad : \quad \alpha \cdot P(t,K) := \alpha \cdot \left(\sum_{i=0}^{n^*(t)} \frac{K(t_i)}{S(t_i)} \right) \cdot S(t)$$

$$\text{Garantie} \quad : \quad A(t,g) := \sum_{i=0}^{n^*(t)} K(t_i) \cdot \exp\{g \cdot (t - t_i)\}$$

	t_0	t_1	$\dots$	t_{N-1}	$t_N = T$	
Vermögen:	$S(t_0)$	$S(t_1)$		$S(t_{N-1})$	$S(t_N)$	stochastisch
Prämie:	$K(t_0)$	$K(t_1)$	$\cdots$	$K(t_{N-1})$		deterministisch

$\longmapsto$ Prämiensequence $\longleftarrow$

Ablaufvermögen versus Garantieleistung $t > 0$

$$n^*(t) \quad := \quad min\{n-1, \max\{j \in \mathbb{N}_0 | t_j < t\}\}$$

$$\text{Ablaufvermögen} \quad : \quad \alpha \cdot P(t,K) := \alpha \cdot \left(\sum_{i=0}^{n^*(t)} \frac{K(t_i)}{S(t_i)} \right) \cdot S(t)$$

$$\text{Garantie} \quad : \quad A(t, \mathrm{g}) := \sum_{i=0}^{n^*(t)} K(t_i) \cdot \exp\{\mathrm{g} \cdot (t - t_i)\}$$

Ausprägungen von Zinsgarantien

Konstante Zinsgarantie

$$A(t, \bar{g}) := \sum_{i=0}^{n^*(t)} K(t_i) \cdot \exp\{\bar{g} \cdot (t - t_i)\}$$

$$\bar{g} = \text{(logarithmierte) flache Zinsgarantie}$$

- langfristige und durchschnittliche Renditegarantie
- durchschnittliche Mindesverzinsung der Prämie
- unabhängig von der Entwicklung im Zinsmarkt

Ausprägungen von Zinsgarantien

Konstante Zinsgarantie

$$\begin{aligned} A(t, \overline{g}) &:= \sum_{i=0}^{n^*(t)} K(t_i) \cdot \exp\{\overline{g} \cdot (t - t_i)\} \\ \overline{g} &= \text{(logarithmierte) flache Zinsgarantie} \end{aligned}$$

- langfristige und durchschnittliche Renditegarantie
- durchschnittliche Mindesverzinsung der Prämie
- unabhängig von der Entwicklung im Zinsmarkt

Ausprägungen von Zinsgarantien

Fix-end Swap Yield Zinsgarantie

$$y_s(t_i, t_N) := \text{Swap Yield zum Zeitpunkt } t_i \text{ mit Fälligkeit } t_N$$

$$y_s(i) := \ln\Big(1 + y_s(t_i, t_N)\Big)$$

$$A(t, y_s) := \sum_{i=0}^{n^*(t)} K(t_i) \cdot \exp\{y_s(i) \cdot (t - t_i)\}$$

- stochastisch aber adaptiert
- Bindungsfrist der Swap-Yield sinkt im Zeitverlauf
- bei frühzeitiger Vertragsbeendigung (Tod, Storno) erfolgt die garantierte Verzinsung zu einem langfristigen Zinssatz.
- $y_s(i) \cdot \beta$ mit $\beta \in]0,1[$

Ausprägungen von Zinsgarantien

Fix-end Swap Yield Zinsgarantie

$$\begin{aligned} y_s(t_i, t_N) &:= \text{Swap Yield zum Zeitpunkt } t_i \text{ mit Fälligkeit } t_N \\ y_s(i) &:= \ln\left(1 + y_s(t_i, t_N)\right) \\ A(t, y_s) &:= \sum_{i=0}^{n^*(t)} K(t_i) \cdot \exp\{ y_s(i) \cdot (t - t_i)\} \end{aligned}$$

- stochastisch aber adaptiert
- Bindungsfrist der Swap-Yield sinkt im Zeitverlauf
- bei frühzeitiger Vertragsbeendigung (Tod, Storno) erfolgt die garantierte Verzinsung zu einem langfristigen Zinssatz.
- $y_s(i) \cdot \beta$ mit $\beta \in]0, 1[$

Fix-length Yield Zinsgarantie

$$\boxed{\begin{aligned} y_s(t_i;k) &:= \text{Swap Yield zum Zeitpunkt } t_i \text{ mit Fälligkeit } t_{i+k} \\ y_s(i;k) &:= \ln\Big(1 + y_s(t_i;k)\Big) \\ A(t, y_s) &:= \sum_{i=0}^{n^*(t)} K(t_i) \cdot \exp\{ y_s(i;k) \cdot (t - t_i)\} \end{aligned}}$$

- stochastisch aber adaptiert
- Bindungsfrist bleibt konstant; z.B. $t_{i+k} - t_i =$ ein Jahr

Zustandabhängigkeit

Die Garantieverzinsung $y(t_i)$ der Prämie zum Zeitpunkt t_i ist abhängig von der Zinsstrukturkurve zum Zeitpunkt t_i aber unabhängig von der weiteren Zinsveränderung.

Fix-length Yield Zinsgarantie

$$\boxed{\begin{aligned} y_s(t_i;k) &:= \text{Swap Yield zum Zeitpunkt } t_i \text{ mit Fälligkeit } t_{i+k} \\ y_s(i;k) &:= \ln\left(1 + y_s(t_i;k)\right) \\ A(t, y_s) &:= \sum_{i=0}^{n^*(t)} K(t_i) \cdot \exp\{ y_s(i;k) \cdot (t - t_i)\} \end{aligned}}$$

- stochastisch aber adaptiert
- Bindungsfrist bleibt konstant; z.B. $t_{i+k} - t_i =$ ein Jahr

Zustandabhängigkeit

Die Garantieverzinsung $y(t_i)$ der Prämie zum Zeitpunkt t_i ist abhängig von der Zinsstrukturkurve zum Zeitpunkt t_i aber unabhängig von der weiteren Zinsveränderung.

Fix-length Yield Zinsgarantie

$$
\begin{aligned}
y_s(t_i;k) &:= \text{Swap Yield zum Zeitpunkt } t_i \text{ mit Fälligkeit } t_{i+k} \\
y_s(i;k) &:= \ln\Big(1 + y_s(t_i;k)\Big) \\
A(t, y_s) &:= \sum_{i=0}^{n^*(t)} K(t_i) \cdot \exp\{y_s(i;k) \cdot (t - t_i)\}
\end{aligned}
$$

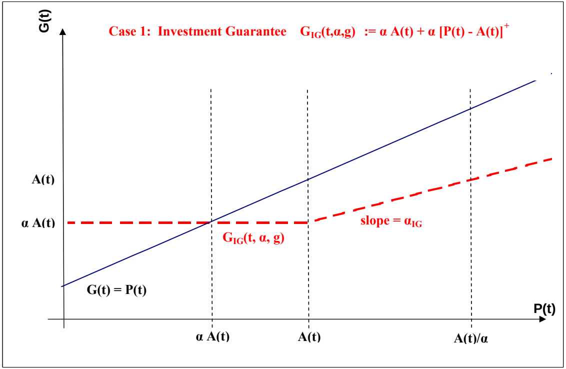
- stochastisch aber adaptiert
- Bindungsfrist bleibt konstant; z.B. $t_{i+k} - t_i =$ ein Jahr

Zustandabhängigkeit

Die Garantieverzinsung $y(t_i)$ der Prämie zum Zeitpunkt t_i ist abhängig von der Zinsstrukturkurve zum Zeitpunkt t_i aber unabhängig von der weiteren Zinsveränderung.

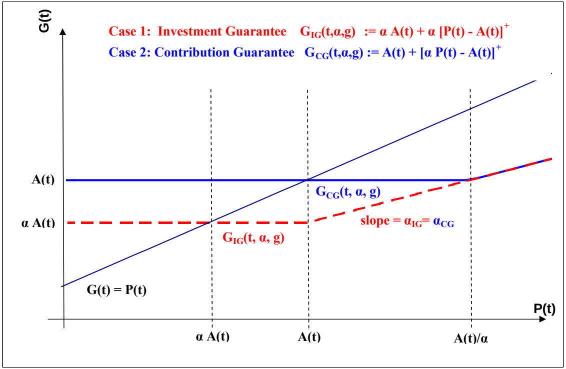
Investitionsgarantie: $t \in]t_0, T]$

$$\begin{aligned} G_{IG}(t, \alpha, g) &:= \max\{\alpha \cdot P(t,K), \alpha \cdot A(t, g)\} \\ &= \alpha \cdot P(t,K) + \alpha \cdot [A(t, g) - P(t,K)]^+ \end{aligned}$$



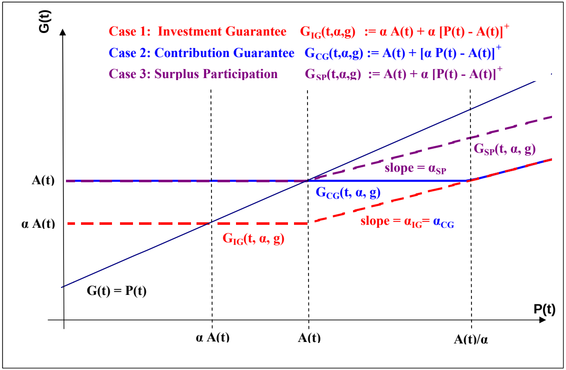
Beitragsgarantie: $t \in]t_0, T]$

$$
\begin{aligned}
G_{CG}(t, \alpha, g) &:= \max\{\alpha \cdot P(t,K), A(t,g)\} \\
&= \alpha \cdot P(t,K) + [A(t,g) - \alpha \cdot P(t,K)]^+
\end{aligned}
$$



Beteiligungsgarantie: $t \in]t_0, T]$

$$\begin{aligned} G_{SP}(t, \alpha, g) &:= A(t, g) + \alpha \cdot [P(t,K) - A(t, g)]^+ \\ &= (1-\alpha) \cdot A(t, g) + \alpha \cdot P(t,K) \\ &\quad + \alpha \cdot [A(t, g) - P(t,K)]^+ \end{aligned}$$



Im Mittel zulässige Verträge

- Für einen Versicherungsnehmer im Alter x
- heißt ein Vertrags mit Garantie $c \in \{IG, CG, SP\}$,
- Investitionsanteil α und
- Garantiezins g

im Mittel zulässig für die Prämien $(K^*(t_0), \dots, K^*(t_N))$ falls

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{N-1} K^*(t_i) \cdot D(t_0, t_i) \cdot \left(1 - \int_{t_0}^{t_i} \pi_x(u)du\right) \\ = & \int_{t_0}^{t_N} D(t_0, u) \cdot E_{Q^{t_u}}\left[G_c(u, \alpha, g)|F_0\right] \cdot \pi_x(u)\, du \\ & + D(t_0, t_N) \cdot E_{Q^{t_N}}\left[G_c(t_N, \alpha, g)|F_0\right] \cdot \left(1 - \int_{t_0}^{t_N} \pi_x(u)du\right). \end{aligned}$$

Im Mittel zulässige Verträge

- Für einen Versicherungsnehmer im Alter x
- heißt ein Vertrags mit Garantie $c \in \{IG, CG, SP\}$,
- Investitionsanteil α und
- Garantiezins g

im Mittel zulässig für die Prämien $(K^*(t_0), \ldots, K^*(t_N))$ falls

$$\boxed{\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{N-1} K^*(t_i) \cdot D(t_0, t_i) \cdot \left(1 - \int_{t_0}^{t_i} \pi_x(u) du\right) \\ = \quad & \int_{t_0}^{t_N} D(t_0, u) \cdot E_{Q^{t_u}} \left[G_c(u, \alpha, g) | \mathbf{F}_0\right] \cdot \pi_x(u)\, du \\ & + D(t_0, t_N) \cdot E_{Q^{t_N}} \left[G_c(t_N, \alpha, g) | \mathbf{F}_0\right] \cdot \left(1 - \int_{t_0}^{t_N} \pi_x(u) du\right) \end{aligned}}.$$

Todesverteilung: Makeham formula

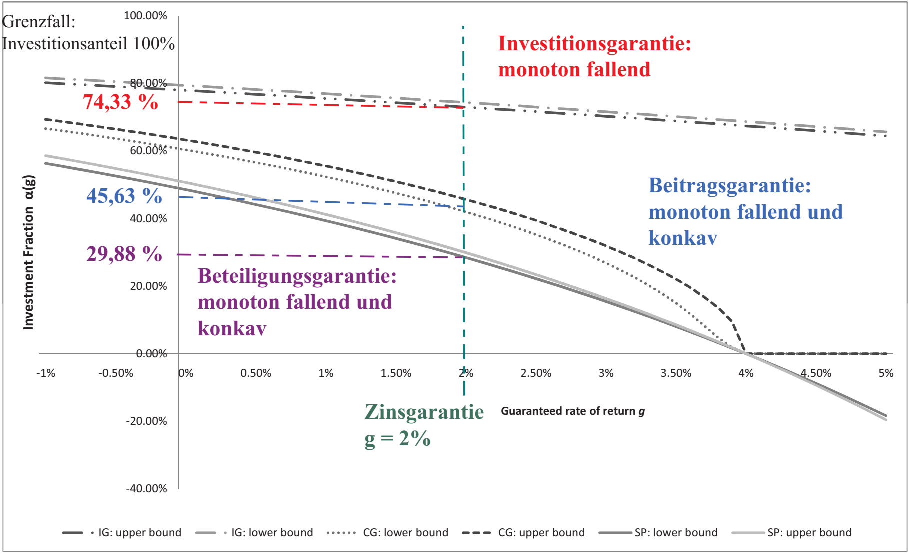
$$
\begin{aligned}
l_x &:= b \cdot s^x \cdot g^{c^x} \qquad \text{mit} \\
s &:= 0.99949255, \quad g := 0.99959845, \\
c &:= 1.10291509, \quad b := 1000401.71, \\
\Longrightarrow \pi_x(\tau_i) &= \frac{l_{x+\tau_i} - l_{x+\tau_i+\Delta\tau}}{l_x} \;\hat{=}\; \text{prob. Tod in }]\tau_i, \tau_i + \Delta\tau[.
\end{aligned}
$$

Finanzmarktrisiken: Gaußmodell

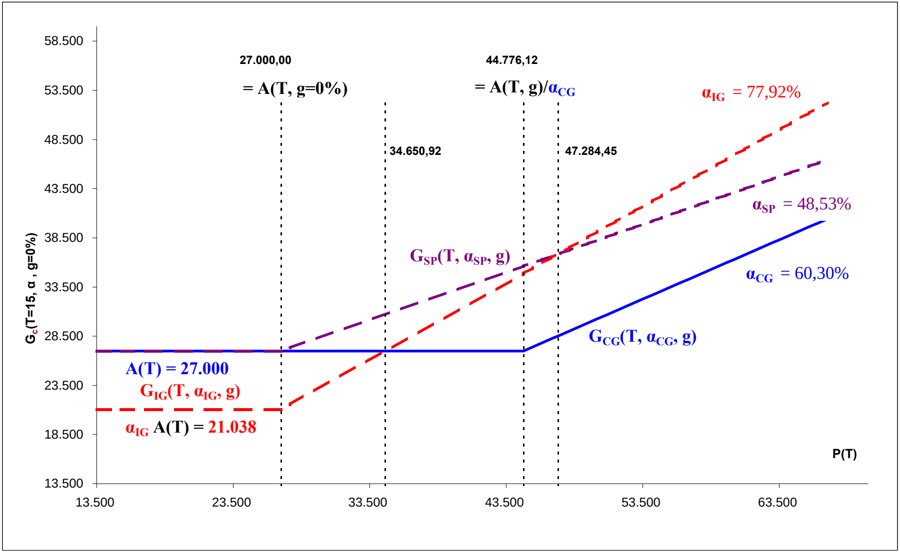
- Vasicek Zinsstrukturmodell:

$$\sigma(u,t) = \frac{\sigma}{\alpha}\left(1 - \exp\{-\alpha(t-u)\}\right) \quad \forall 0 \le u \le t,$$

  mit $\alpha = 0.25, \sigma = 3.75\%$ und flacher (4%) Zinskurve
- Wertanlage: Black-Scholes Modell mit $\sigma_S = 25\%$ und Korrelation Null



Im Mittel zulässige Verträge: $\alpha(g, T = 15)$, Alter 45

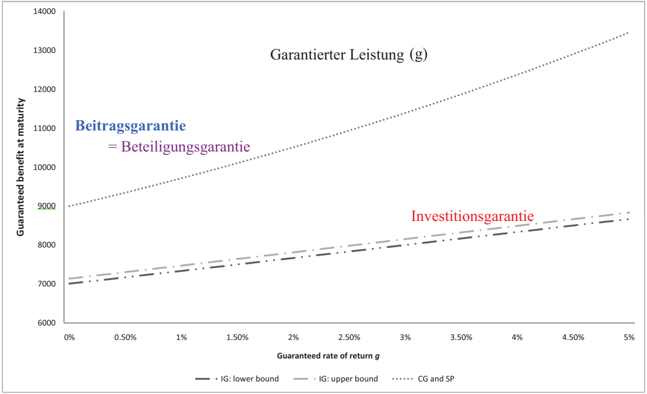


Auszahlung bei Fälligkeit im Mittel zulässiger Verträge:

$T = 15$, $\boxed{g = 0\%}$, $K = 300$

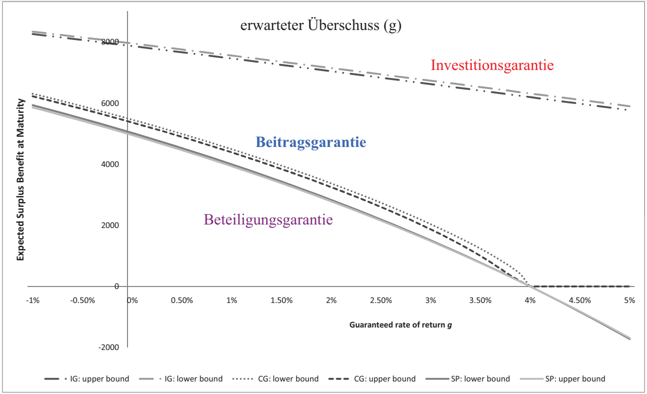
Zerlegung: Garantierter und erwarteter Überschuss

$$
\begin{aligned}
G_{IG}(t,\alpha,g) &:= \max\{\alpha\cdot P(t,K), \alpha\cdot A(t,g)\}\\
G_{CG}(t,\alpha,g) &:= \max\{\alpha\cdot P(t,K), A(t,g)\}\\
G_{SP}(t,\alpha,g) &:= A(t,g) + \alpha\cdot[P(t,K) - A(t,g)]^{+}
\end{aligned}
$$



Zerlegung: Garantierter und erwarteter Überschuss

$$
\begin{aligned}
G_{IG}(t,\alpha,g) &:= \max\{\alpha \cdot P(t,K), \alpha \cdot A(t,g)\}\\
G_{CG}(t,\alpha,g) &:= \max\{\alpha \cdot P(t,K), A(t,g)\}\\
G_{SP}(t,\alpha,g) &:= A(t,g) + \alpha \cdot [P(t,K) - A(t,g)]^{+}
\end{aligned}
$$



Todesfalleistung: $t \in]t_0, T]$

Garantieleistung plus Beteiligung am Vermögensüberschuss

$$
\begin{aligned}
G_I(t) &:= A_I(t, g) + [\alpha \cdot P(t,K) - A_I(t, g)]^+ \\
A_I(t_i, g) &:= \text{garantierte Versicherungsleistung, deterministisch}
\end{aligned}
$$

Inflationsangepasste **Rente** $t_j, j \geq N$

$$
\begin{aligned}
Q(t_j) &:= \beta_{T,t_j} \cdot \left(q(t_j) + \left[\frac{1}{L} \cdot \alpha \cdot P(T,K) - q(t_j) \right]^+ \right), \\
\beta_{T,t_j} &:= \text{stochastische Aufzinsung ab } t_j \\
q(t_j) &:= \text{garantierte Rente, deterministisch} \\
L &:= \text{erwartete Rentenperioden}
\end{aligned}
$$

garantierte Todesfalleistung: $t > t_N = T$

$$
G_P(t) := \left[A_P(T) - \sum_{j=N}^{n^*(t)} q(t_j) \right]^+
$$

Todesfalleistung: $t \in]t_0, T]$

Garantieleistung plus Beteiligung am Vermögensüberschuss

$$\begin{aligned} G_I(t) &:= A_I(t, g) + [\alpha \cdot P(t,K) - A_I(t, g)]^+ \\ A_I(t_i, g) &:= \text{garantierte Versicherungsleistung, deterministisch} \end{aligned}$$

Inflationsangepasste **Rente** $t_j, j \geq N$

$$\begin{aligned} Q(t_j) &:= \beta_{T,t_j} \cdot \left(q(t_j) + \left[\frac{1}{L} \cdot \alpha \cdot P(T,K) - q(t_j) \right]^+ \right), \\ \beta_{T,t_j} &:= \text{stochastische Aufzinsung ab } t_j \\ q(t_j) &:= \text{garantierte Rente, deterministisch} \\ L &:= \text{erwartete Rentenperioden} \end{aligned}$$

garantierte Todesfalleistung: $t > t_N = T$

$$G_P(t) := \left[A_P(T) - \sum_{j=N}^{n^*(t)} q(t_j) \right]^+$$

Todesfalleistung: $t \in]t_0, T]$

Garantieleistung plus Beteiligung am Vermögensüberschuss

$$\begin{aligned} G_I(t) &:= A_I(t, g) + [\alpha \cdot P(t,K) - A_I(t, g)]^+ \\ A_I(t_i, g) &:= \text{garantierte Versicherungsleistung, deterministisch} \end{aligned}$$

Inflationsangepasste **Rente** $t_j, j \geq N$

$$\begin{aligned} Q(t_j) &:= \beta_{T,t_j} \cdot \left(q(t_j) + \left[\frac{1}{L} \cdot \alpha \cdot P(T,K) - q(t_j) \right]^+ \right), \\ \beta_{T,t_j} &:= \text{stochastische Aufzinsung ab } t_j \\ q(t_j) &:= \text{garantierte Rente, deterministisch} \\ L &:= \text{erwartete Rentenperioden} \end{aligned}$$

garantierte Todesfalleistung: $t > t_N = T$

$$G_P(t) := \left[A_P(T) - \sum_{j=N}^{n^*(t)} q(t_j) \right]^+$$

Im Mittel zulässige Verträge

erwarteter diskontierte Prämienleistung
= erwartete diskontierte Versicherungsleistung

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{N-1} K^*(t_i) \cdot D(t_0, t_i) \cdot \left(1 - \int_{t_0}^{t_i} \pi_x(u)du\right) \\
= &\int_{t_0}^{T} D(t_0, u) \cdot E_{P^u}\left[G_I(u)|\mathbf{F}_0\right] \cdot \pi_x(u)\, du \\
&+ \sum_{j=N}^{\infty} D(t_0, t_j) \cdot E_{P^{t_j}}\left[Q(t_j)|\mathbf{F}_0\right] \cdot \left(1 - \int_{t_0}^{t_j} \pi_x(u)du\right) \\
&+ \int_{T}^{\infty} D(t_0, u) \cdot E_{P^u}\left[G_P(u)|\mathbf{F}_0\right] \cdot \pi_x(u)\, du.
\end{aligned}
$$

Im Mittel zulässige Verträge

erwarteter diskontierte Prämienleistung
= erwartete diskontierte Versicherungsleistung

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{N-1} K^*(t_i) \cdot D(t_0, t_i) \cdot \left(1 - \int_{t_0}^{t_i} \pi_x(u)du\right) \\
= \quad & \int_{t_0}^{T} D(t_0, u) \cdot E_{P^u}\left[G_I(u)|\mathbf{F}_0\right] \cdot \pi_x(u)\, du \\
& + \sum_{j=N}^{\infty} D(t_0, t_j) \cdot E_{P^{t_j}}\left[Q(t_j)|\mathbf{F}_0\right] \cdot \left(1 - \int_{t_0}^{t_j} \pi_x(u)du\right) \\
& + \int_{T}^{\infty} D(t_0, u) \cdot E_{P^u}\left[G_P(u)|\mathbf{F}_0\right] \cdot \pi_x(u)\, du.
\end{aligned}
$$

Todesvereteilung = Makeham formula

Zinsänderungsrisiko = Vasicek Modell

$$\sigma(u,t) = \frac{\sigma}{\alpha}\left(1 - \exp\{-\alpha(t-u)\}\right) \quad \forall 0 \le u \le t,$$

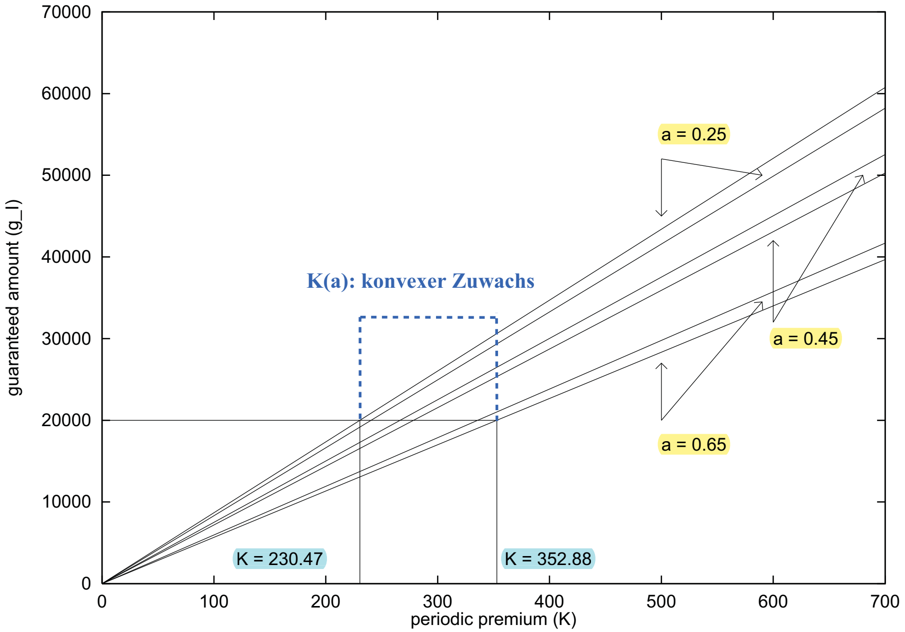
mit $\alpha = 0.25, \sigma = 15\%$ und flacher (4%) Zinskurve

Wertanlagen = Black-Scholes Modell

mit $\sigma = 25\%$ and Korrelation Null.

Versicherungsvertrag

Alter 35, monatliche Prämie, Laufzeit $T = 30$ Jahre, Garantien: $A_I(T) = A_P(T)$ and $q = 0.05 \cdot A_I(T)$



70000
60000
50000
40000
30000
20000
10000
0
guaranteed amount (g_l)
0
100
200
300
400
500
600
700
periodic premium (K)
a = 0.25
a = 0.45
a = 0.65
K(a): konvexer Zuwachs
K = 230.47
K = 352.88

Prämienzerlegung $A_I = A_P = 20.000, q = 1.000$

Mit stochastischer Aufzinsung der Rentenleistung:

α	Prämie untere	Prämie obere	Risiko-leben	aggr. Rente	period. Rente	Portf. Vers. untere	Portf. Vers. obere
0,6	313,37	328,59	9,72	0,50	201,49	101,66	116,88
0,5	279,52	292,35	9,72	0,50	201,49	68,03	80,86
0,4	255,34	266,73	9,72	0,50	201,49	43,63	55,02
0,2	224,40	234,06	9,72	0,50	201,49	12,89	22,35
0	211,71	211,71	9,72	0,50	201,49	0	0

Ohne stochastische Aufzinsung der Rentenleistung:

α	Prämie untere	Prämie obere	Risiko-leben	aggr. Rente	period. Rente	Portf. Vers. untere	Portf. Vers. obere
0,6	269,16	281,87	9,72	21,72–22,14	144,81	92,91	105,20
0,5	231,33	241,23	9,72	17,20–17,54	144,81	59,60	69,16
0,4	205,34	213,15	9,72	13,16–13,40	144,81	37,56	45,22
0,2	171,50	177,29	9,72	6,08–6,18	144,81	10,89	16,58
0	154,53	154,53	9,72	0	144,81	0	0

Prämienzerlegung $A_I = A_P = 20.000, q = 1.000$

Mit stochastischer Aufzinsung der Rentenleistung:

α	Prämie untere	Prämie obere	Risiko-leben	aggr. Rente	period. Rente	Portf. Vers. untere	Portf. Vers. obere
0,6	313,37	328,59	9,72	0,50	201,49	101,66	116,88
0,5	279,52	292,35	9,72	0,50	201,49	68,03	80,86
0,4	255,34	266,73	9,72	0,50	201,49	43,63	55,02
0,2	224,40	234,06	9,72	0,50	201,49	12,89	22,35
0	211,71	211,71	9,72	0,50	201,49	0	0

Ohne stochastische Aufzinsung der Rentenleistung:

α	Prämie untere	Prämie obere	Risiko-leben	aggr. Rente	period. Rente	Portf. Vers. untere	Portf. Vers. obere
0,6	269,16	281,87	9,72	21,72–22,14	144,81	92,91	105,20
0,5	231,33	241,23	9,72	17,20–17,54	144,81	59,60	69,16
0,4	205,34	213,15	9,72	13,16–13,40	144,81	37,56	45,22
0,2	171,50	177,29	9,72	6,08–6,18	144,81	10,89	16,58
0	154,53	154,53	9,72	0	144,81	0	0

Prämienzerlegung $A_I = A_P = 20.000, q = 1.000$

Mit und ohne stochastische Aufzinsung der Rentenleistung:

	untere Grenze			obere Grenze		
		Invest.	Risikopr.		Invest.	Risikopr.
α	K	$\alpha \cdot K$	$(1-\alpha) \cdot K$	K	$\alpha \cdot K$	$(1-\alpha) \cdot K$
0.6	313.37	188.02	125.35	328.59	197.16	131.44
0.5	279.52	139.76	139.76	292.35	146.17	146.17
0.4	255.34	102.14	153.20	266.73	106.69	160.04
0.2	224.40	44.88	179.52	234.06	46.81	187.25
0	211.71	0	211.71	211.71	0	211.71

	untere Grenze			obere Grenze		
		Invest.	Risikopr.		Invest.	Risikopr.
α	K	$\alpha \cdot K$	$(1-\alpha) \cdot K$	K	$\alpha \cdot K$	$(1-\alpha) \cdot K$
0.6	269.16	161.50	107.67	281.87	169.12	112.75
0.5	231.33	115.67	115.67	241.23	120.61	120.61
0.4	205.01	82.00	123.01	213.15	85.26	127.89
0.2	171.50	34.30	137.20	177.29	35.46	141.83
0	154.53	0	154.53	154.53	0	154.53

Prämienzerlegung $A_I = A_P = 20.000, q = 1.000$

Mit und ohne stochastische Aufzinsung der Rentenleistung:

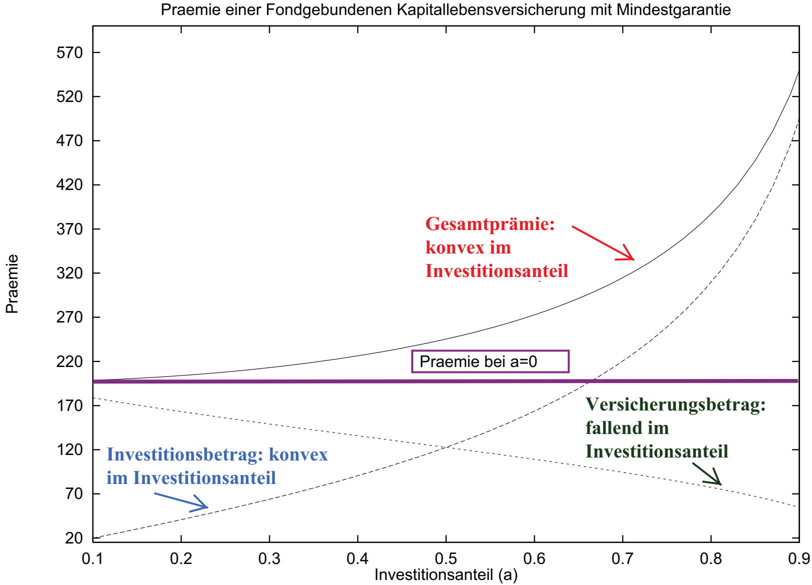
Mit:

	untere Grenze			obere Grenze		
		Invest.	Risikopr.		Invest.	Risikopr.
α	K	$\alpha \cdot K$	$(1-\alpha) \cdot K$	K	$\alpha \cdot K$	$(1-\alpha) \cdot K$
0.6	313.37	188.02	125.35	328.59	197.16	131.44
0.5	279.52	139.76	139.76	292.35	146.17	146.17
0.4	255.34	102.14	153.20	266.73	106.69	160.04
0.2	224.40	44.88	179.52	234.06	46.81	187.25
0	211.71	0	211.71	211.71	0	211.71

Ohne:

	untere Grenze			obere Grenze		
		Invest.	Risikopr.		Invest.	Risikopr.
α	K	$\alpha \cdot K$	$(1-\alpha) \cdot K$	K	$\alpha \cdot K$	$(1-\alpha) \cdot K$
0.6	269.16	161.50	107.67	281.87	169.12	112.75
0.5	231.33	115.67	115.67	241.23	120.61	120.61
0.4	205.01	82.00	123.01	213.15	85.26	127.89
0.2	171.50	34.30	137.20	177.29	35.46	141.83
0	154.53	0	154.53	154.53	0	154.53

Risikoaufteilung der Prämie: nicht-lineare Form



Eigenschaften

- Nicht-lineare Kombination einer Lebensversicherung und einer Vermögensgarantie
- Garantiezins vs (Schluss-) Überschussbeteiligung
- Risikotransfer
- Prämien $\Longrightarrow$ Kombination des Äquivalenz- und des No-Arbitrage Prinzips
- Numerische Berechnung $\Longrightarrow$ Asian Option

Problemstellungen/Erweiterungen

- Hedging
- Extreme Laufzeiten
- Funds switching (AXA 50 Fonds !!!)
- Periodische vs durchschnittliche Garantien

Eigenschaften

- Nicht-lineare Kombination einer Lebensversicherung und einer Vermögensgarantie
- Garantiezins vs (Schluss-) Überschussbeteiligung
- Risikotransfer
- Prämien $\Longrightarrow$ Kombination des Äquivalenz- und des No-Arbitrage Prinzips
- Numerische Berechnung $\Longrightarrow$ Asian Option

Problemstellungen/Erweiterungen

- Hedging
- Extreme Laufzeiten
- Funds switching (AXA 50 Fonds !!!)
- Periodische vs durchschnittliche Garantien

Vicco von Bülow, Loriot (2006): *Gesammelte Prosa, Diogenes, Zürich*

Ein Leben ohne Mops
ist möglich, aber sinnlos.

Loriot (2006):
Gesammelte Prosa, Diogenes, Zürich

Kapitalbildende
Lebens- und Rentenversicherungen
ohne Kapital- oder Zinsgarantien
sind möglich, ... aber !

Vicco von Bülow, Loriot (2006): *Gesammelte Prosa, Diogenes, Zürich*

Ein Leben ohne Mops
ist möglich, aber sinnlos.

Loriot (2006):
Gesammelte Prosa, Diogenes, Zürich

Kapitalbildende
Lebens- und Rentenversicherungen
ohne Kapital- oder Zinsgarantien
sind möglich, ... aber sinnlos !

Literatur

- Bacinello, A. R. und Ortu, F. [1993]:Pricing Equity–Linked Life Insurance with Endogenous Minimum Garantees,*Insurance: Mathematics & Economics* 12, 245-257.
- Curran, M.[1994]: Valuing Asian and portfolio 0ptions by conditioning on the geometric mean price,*Management Science* 40(12), 1705–1711.
- Nielsen J. A. und Sandmann K. [1996]: Uniqueness of the Fair Premium for Equity-Linked Life Insurance Contracts, *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory* 21, 65-102.
- Nielsen J. A. und Sandmann K. [2002]: The Fair Premium of an Equity Linked Life and Pension Insurance. In P. Schönbucher und K. Sandmann (eds.): Advances in Finance and Stochastics: Essays in Honor of Dieter Sondermann, Springer Verlag, Heidelberg.
- Nielsen, J. A.; K. Sandmann; E. Schlögl [2011]: Equity-linked pension schemes with guarantees, *Insurance, Mathematics and Economics* 49, 547-564.
- Sandmann, K [2005]: Überschussbeteiligung fondsgebundener Lebens- und Rentenversicherungen. In W. Kürsten und B. Nietert (eds): Kapitalmarkt, Unterneh-mensfinanzierung und rationale Entscheidungen, Festsschrift für Jochen Wilhelm, Springer Verlag Heidelberg.
- Rogers, L. und Shi, Z. [1995]: The Value of an Asian Option, *Journal of Applied Probability* 32, 1077-1088