



# *Wie viel Zins braucht die Praxis?*

## *Konzepte, Modelle, Probleme*

Ralf Korn (TU Kaiserslautern, Fraunhofer ITWM, EI-QFM)

## ***Überblick***

***Abgrenzung: Zins  $\Leftrightarrow$  Inflation***

***Motivation: Probleme und Ideen***

***Wünschenswerte Eigenschaften von Zinsmodellen***

***Short-Rate-Modelle: Bewährt, aber ....***

***Forward-Rate-Modelle: Schwierig, aber ...***

***LIBOR-Markt-Modelle: Nicht mehr als nötig ...***

***Probleme der Praxis – Herausforderungen an die Forschung***

## 0. Abgrenzung: Zins $\Leftrightarrow$ Inflation

- Modellierung von Zins und Inflation getrennt ?
- Beahlt der „Zins“ die Inflation ?

Fisher-Gleichung (1930):

$$r_N(t) = r_R(t) + E(i(t))$$

wobei

- $r_N(t)$  = nominale Zinsrate für einen Anlagehorizont in  $t$
- $r_R(t)$  = realer Zinssatz bis  $t$ , der dem Gewinn an realer Kaufkraft bei einer Anlage zum nominalen Zins  $r_N(t)$  entspricht
- $E[i(t)]$  = erwartete Inflationsrate für den Zeithorizont  $t$

**Heute:**

Nur Betrachtung der **Modellierung des Nominalzinses**

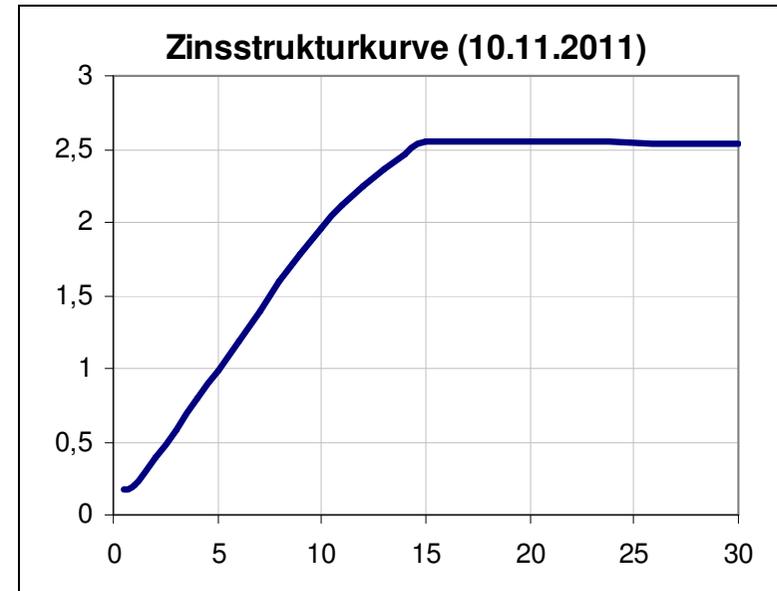
(für Inflationsmodellierung z.B. K., Kruse (2004), Beletski, K. (2006))

## 1. Motivation: DAX $\Leftrightarrow$ Zinsstrukturkurve

DAX (2005-jetzt)



Aktuelle Zinsstrukturkurve



**Benötigt man überhaupt eine (stochastische) Zinsmodellierung ?**

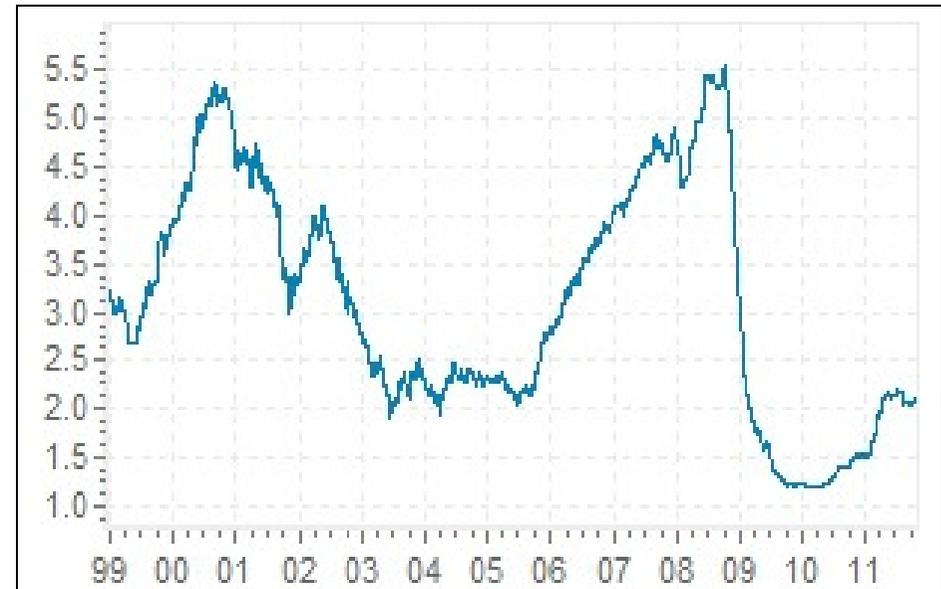
⇒ Falscher Vergleich, DAX-„Strukturkurve“ besteht nur aus einem Punkt ....

# 1. Motivation: DAX $\Leftrightarrow$ Zinsratenentwicklung

DAX (2005-jetzt)



Einjährige Zinsraten (1999-jetzt)

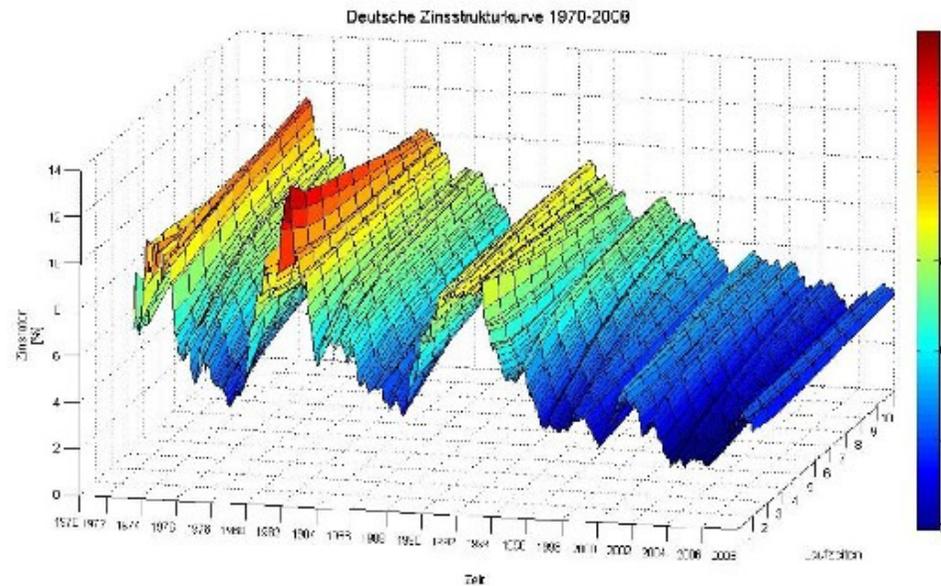


**Benötigt man überhaupt ein neues Modell zur Zinsmodellierung ?**

- Ähnlich „zufällige“ Bewegungen im Zins- wie im Aktienbereich
- **Aber:** Es gibt für jede mögliche Laufzeit eine solche Kurve des zeitlichen Verlaufs der Zinsraten !

# 1. Motivation: Das Zinsgebirge

Zeitliche Entwicklung „aller“ Zinsen gemeinsam:



Dynamik der deutschen Zinsstrukturkurve 1970-2008  
(aus: Pfeiffer e.a. (2010))

# 1. *Motivation*: Hauptprobleme und Ideen der Modellierung

## Vollständige Zinsmodellierung

= Modellierung von Kurven über die Zeit hinweg  $\Rightarrow$   $\infty$ -dimensionales Problem !

## Ideen/Konzepte/Lösungsansätze

**Idee 1:** *Die Zinsstrukturkurve ist glatter als die Entwicklung der Zinsraten*

$\Rightarrow$  Modelliere die Entwicklung einer Zinsrate über die Zeit hinweg als stochastischen Prozess und hänge „schöne“ Kurven an

$\Rightarrow$  **Short Rate-Ansatz** („Kassazinsratenmodell“)

**Idee 2:** *Wähle die heute beobachtete Zinsstrukturkurve als Ausgangspunkt und schreibe ihre Entwicklung als stochastischen Prozess fort*

$\Rightarrow$  **Forward Rate-Ansatz** („Terminzinsratenmodell“)

**Idee 3:** *Modelliere nur, was wirklich gebraucht und am Markt echt beobachtbar ist*

$\Rightarrow$  Modelliere die zeitliche Entwicklung einfacher Zinsraten als Prozesse

$\Rightarrow$  **LIBOR-Marktmodelle**

## 2. Wünschenswerte Eigenschaften von Zinsmodellen

- **Realistische Dynamik** der Zinsen über die Zeit („So bewegen wie in echt“)
- **Realistische Form der möglichen Zinsstrukturkurve**
- **Mean-Reversion-Effekt** („Hohe Zinsen fallen, niedrige steigen“)
- **Nichtnegativität** der „Zinsen“
- **Perfect Fit** of the Initial Term Structure (Können beobachtete Preise durch das Modell erklärt werden ?, „MCEV“)
- **Analytische Gutartigkeit** des Modells („Lassen sich Preise einfach und stabil berechnen ?“)
- **Kalibrierung** einfach möglich
- **Viele explizite Preisformeln** für Derivate und andere Produkte
- **Möglichkeit zur Modellierung von Zinszyklen, Langfristeffekte, ...**
- **Einbeziehung anderer Investmentformen**

### ***3. Short-Rate-Modelle: Bewährt, aber ....***

**Von der Praxis seit Jahren benutzt, z.B. in Form von**

- Vasicek-Modell
- Cox-Ingersoll-Ross-Modell
- Black-Karasinski-Modell
- Hull-White-Modell (bzw. –Modellvarianten)
- 1- und 2-Faktormodelle

**Idee 1:** *Die Zinsstrukturkurve ist glatter als die Entwicklung der Zinsraten*

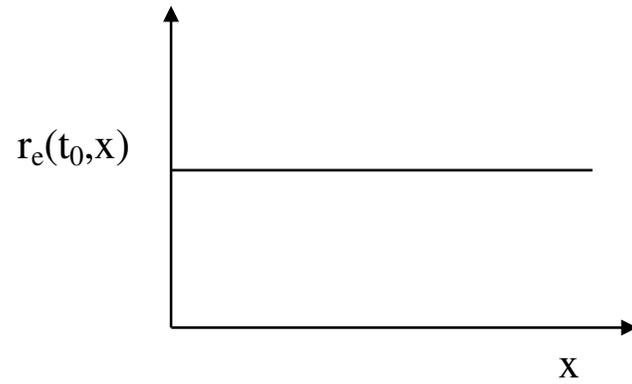
⇒ Modelliere die Entwicklung einer Zinsrate (und zwar der Kassazinsrate) über die Zeit hinweg als stochastischen Prozess und hänge „schöne“ Kurven an

#### **Fragen:**

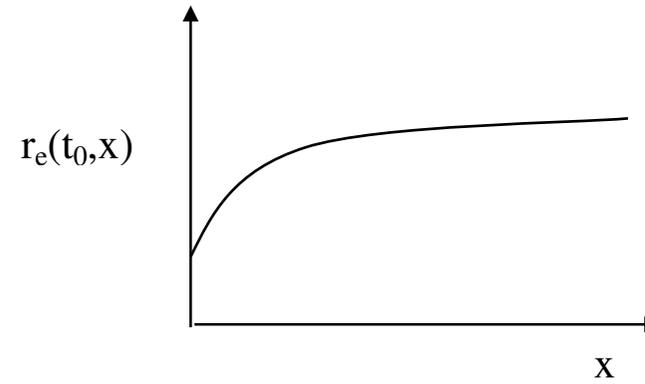
- Wie sehen „schöne Zinskurven aus ?
- Wie modelliert man die Entwicklung der Kassazinsrate über die Zeit hinweg ?

# Typische Formen der Zinsstruktur

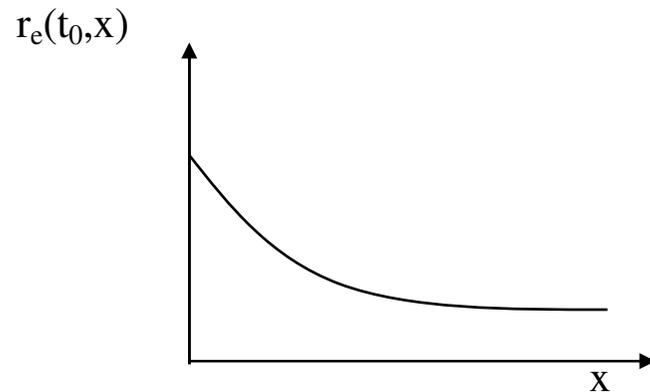
## i) Flache Zinsstruktur



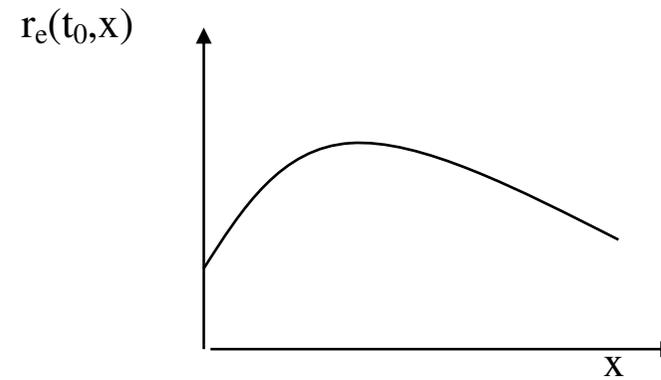
## ii) Normale Zinsstruktur



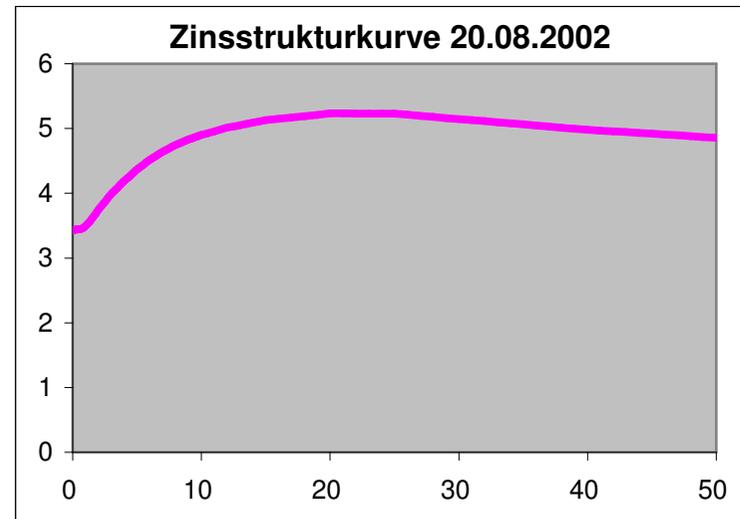
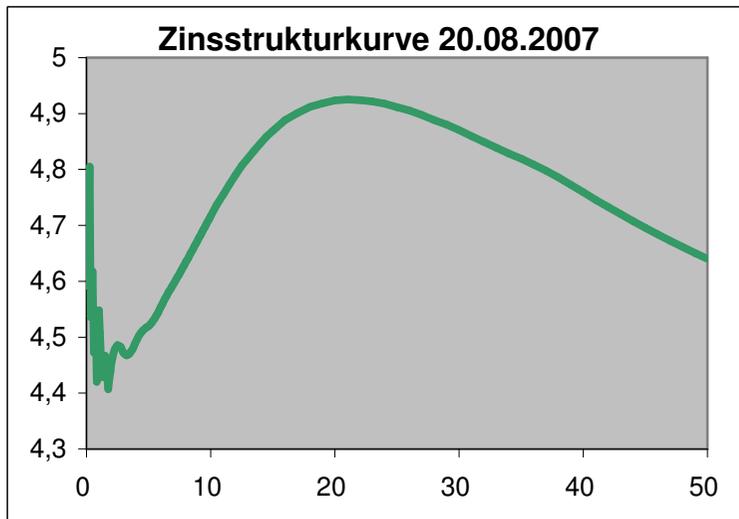
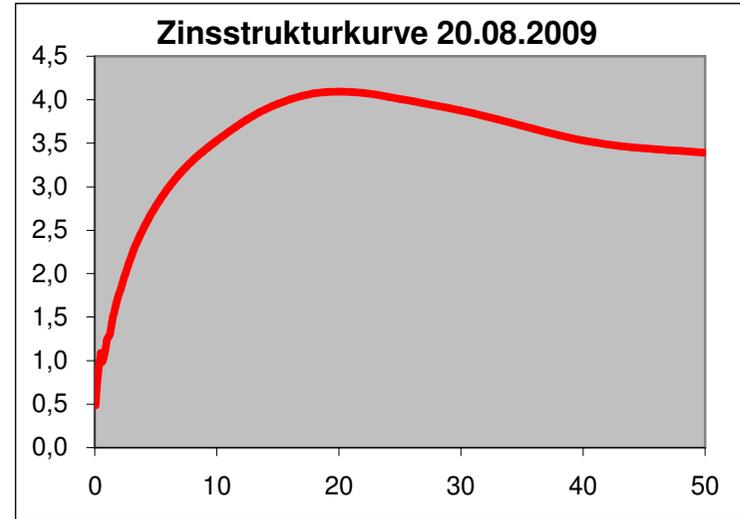
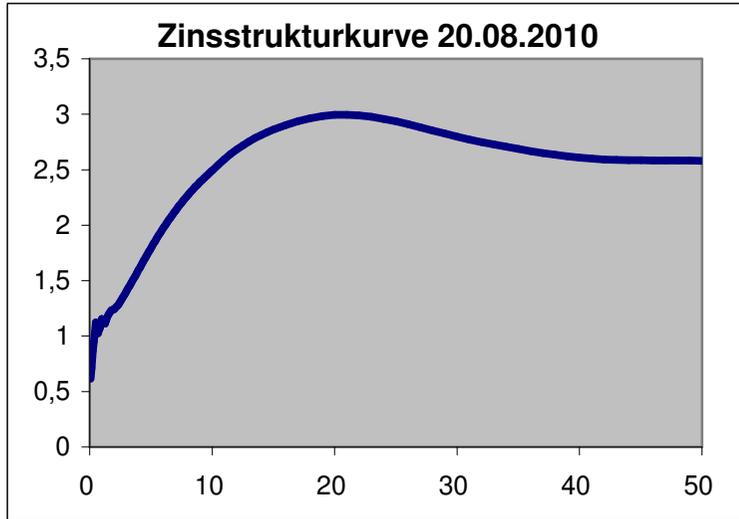
## iii) Inverse Zinsstruktur



## iv) Gewölbte Zinsstruktur



# So war / ist die Zinsstruktur:



## Einfachstes, gängiges Short-Rate-Modell

### Das Vasicek-Modell (Vasicek 1977)

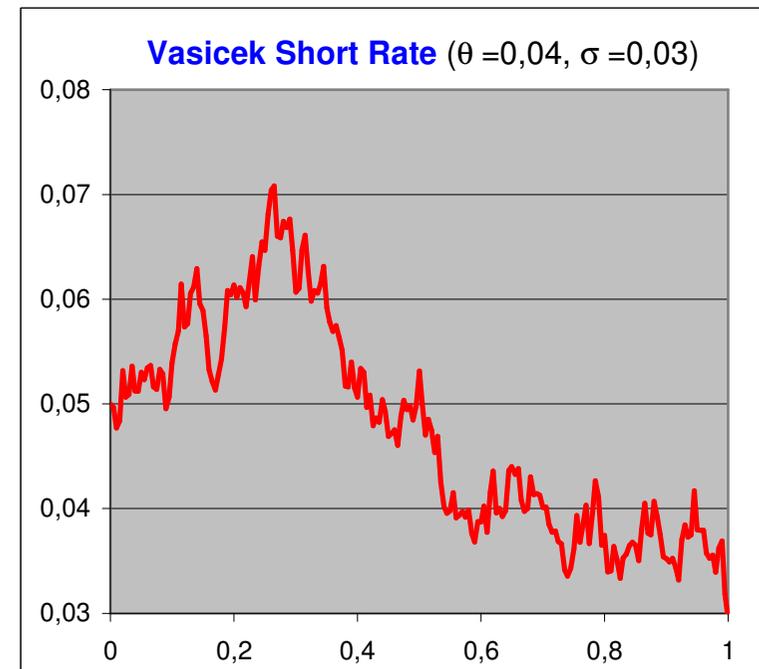
$$(1) \quad dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma dW(t), \quad W(t) \text{ Brownsche Bewegung}$$

#### Vorteile:

- Mean-Reversion vorhanden
- Geschlossene Preisformeln für Bonds und Bondoptionen
- Analytisch gut handhabbar
- Kann normale, inverse und gewölbte Zinsstruktur (mit einem Extrem.) erzeugen

#### Nachteile

- Kassazinsrate normal verteilt, kann also auch negativ werden
- Alle Renditen sind eine lineare Funktion der jeweils aktuellen Short-Rate (=> Short-Rate schiebt die Zinsstruktur hoch/runter)
- Keine perfekte Anpassung an heutige Zinsstruktur möglich



## Nicht-negatives, populäres Short-Rate-Modell

**Das CIR-Modell** (Cox-Ingersoll-Ross (1985))

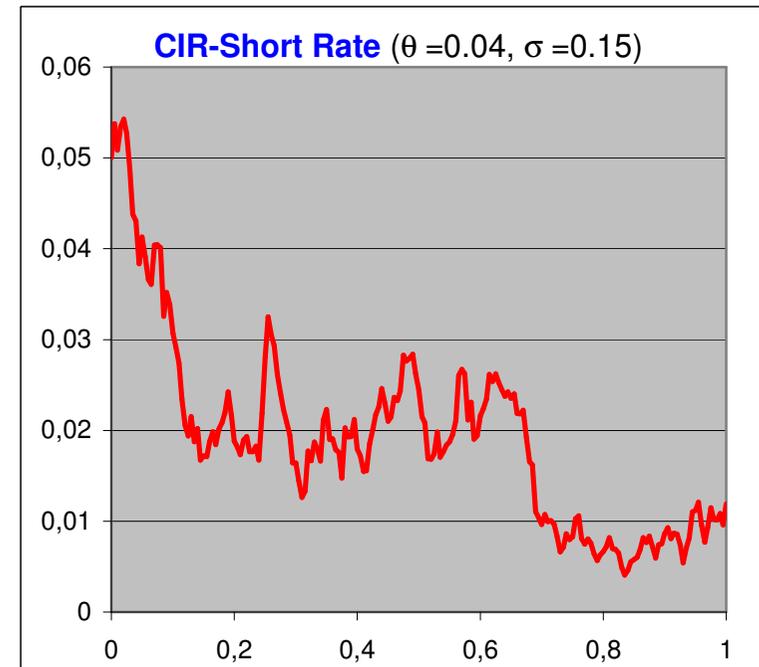
$$(2) \quad dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \quad W(t) \text{ Brownsche Bewegung}$$

### Vorteile:

- Mean-Reversion vorhanden
- Geschlossene Preisformeln für Bonds und Bondoptionen (aber kompliziert !)
- Kassazinsrate nicht-zentral Chi-Quadrat-verteilt, also nicht-negativ
- Kann normale, inverse und gewölbte Zinsstruktur (mit einem Extrem.) erzeugen

### Nachteile

- Analytisch recht **schwer handhabbar**
- Alle Renditen sind eine lineare Funktion der jeweils aktuellen Short-Rate
- Keine perfekte Anpassung an heutige Zinsstruktur möglich
- Probleme mit der Dynamik !



## Short-Rate-Modell mit perfektem Fit

### Das Hull-White-Modell (Hull, White (1985))

(3)  $dr(t) = (\delta(t) - ar(t))dt + \sigma dW(t)$ ,  $a > 0$ ,  $W(t)$  Brownsche Bewegung

wobei

$$(4) \quad \delta(t) = \frac{\partial f^M(0,t)}{\partial T} + af^M(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \quad \text{mit} \quad f^M(0,T) := -\frac{\partial \ln P^M(0,T)}{\partial T}$$

so gewählt wurde, dass die Anfangszerobondpreise  $P(0,T)$  im Modell mit den Marktpreisen  $P^M(0,T)$  übereinstimmen („**Perfect fit of initial term structure**“)

**Aber:** Mean Reversion ist nur noch formal vorhanden !

### Ansonsten:

- Eigenschaften identisch zum Vasicek-Modell
- Sehr populär in der Praxis
- Hull-White-Varianten gibt es auch für CIR- und weitere Modelle

## Noch mehr 1-Faktor-Short-Rate-Modelle

### i) Das allgemeine affin-lineare Modell

$$(5) \quad dr(t) = (\nu(t)r(t) + \eta(t))dt + \sqrt{\gamma(t)r(t) + \delta(t)}dW(t)$$

mit deterministischen Funktionen  $\nu, \eta, \gamma, \delta$

### ii) Das Black-Karasinski-Modell

$$(6) \quad r(t) = \exp(y(t)) \quad \text{mit} \quad dy(t) = (\theta(t) - a(t)y(t))dt + \sigma dW(t)$$

also: exponentieller Hull-White-Ansatz !

### iii) Modellerweiterungen mit deterministischem Shift

Addiere zur kalibrierten Modell-Short-Rate noch eine deterministische Funktion („Shift“), so dass die **Anfangskalibrierung perfekt** wird:

$$(7) \quad r(t) = r^{kal.}(t) + \varphi(t; y)$$

Alternative zum Hull-White-Rahmen.

## Mehr-Faktor-Modelle

- **Empirische Argumente** für Mehr-Faktor-Modelle
  - Mindestens drei Faktoren, um **Level** (=Zinsniveau), **Slope** (= Differenz langfr. – kurzfr. Zins), **Curvature** (=Krümmung) der Zinsstrukturkurve zu modellieren (siehe Litterman, Scheinkman (1991))
  - Reaktion des Marktes auf EZB-Eingriffe => mdsts. zwei Faktoren
- **Praktische Argumente** für Mehr-Faktor-Modelle
  - Besserer Fit und flexiblere Modellierung möglich
  - Mehr Erklärungs-/Interpretationsmöglichkeiten

## Gesucht sind Antworten auf

- Wie viele Faktoren braucht man /sollte man haben ?
- Wie viele Faktoren kann man verarbeiten ?

## Mehrfaktormodelle: Ein Beispiel

**Das 2-Faktor-Hull-White-Modell** (oder 2-Faktor-Gauß-++-Modell)

$$(8) \quad dr(t) = (\delta(t) + u(t) - ar(t)) dt + \sigma_1 dW_1(t),$$

$$(9) \quad du(t) = -bu(t) dt + \sigma_2 dW_2(t), \quad \langle W_1, W_2 \rangle_t = \rho t, \quad W_i(t) \text{ Br. Bewegungen}$$

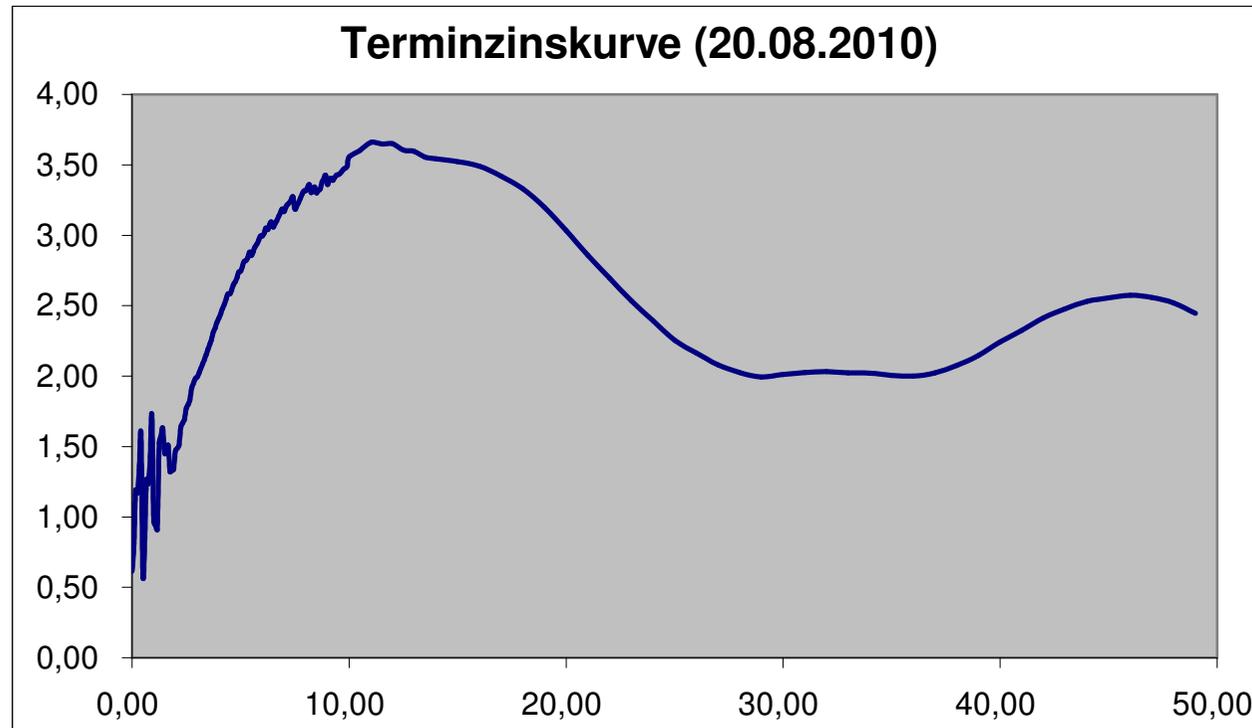
### Konsequenz:

- stochastische Mean-Reversion  $u(t)$  modelliert langfristige Effekte
- Weiterhin normal verteilte Short Rate
- Weiterhin explizite Formeln für Bond- und Bondoptionspreise
- Größere Schätzprobleme
- Weitere Modelle mit zusätzlicher „Long Rate“

### Praxiserfahrung:

Modell für Kunden am Fraunhofer ITWM erfolgreich umgesetzt, gute Performance.

#### 4. *Forward-Rate-Modelle: Schwierig, aber ...*



#### **Short Rate-Modellierung:**

*Modelliere nur (!) die zeitliche Entwicklung des linken Punkts der Terminzinskurve*

#### **Forward Rate-Modellierung:**

*Modelliere die zeitliche Entwicklung der kompletten (!) Terminzinskurve*

## Hauptidee:

Starte die Modellierung der Entwicklung der Forward-Rate-Kurve mit am Markt beobachteten Werten, so hat man **automatisch einen perfekten Fit**, da für Nullkuponanleihenpreise  $P(t, T)$  und Terminzinsraten  $f(t, s)$  die Beziehung gilt

$$(10) \quad P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, s) ds\right)$$

## Allgemeine Forward Rate-Modellierung nach **Heath-Jarrow-Morton (1992)**

$$(11) \quad df(t, T) = \mu_f(t, T)dt + \sigma_f(t, T)dW(t), \quad f(0, T) = -\frac{\partial \ln(P^{\text{markt}}(0, T))}{\partial T}$$

mit einer **d-dimensionalen** Brownschen Bewegung  $W(\cdot)$  und geeigneten Koeffizientenfunktionen und der **HJM-Drift-Bedingung** im risiko-neutralen Markt

$$(12) \quad \mu_f(t, T) = \sigma_f(t, T) \int_t^T \sigma_f(t, s) ds$$

## Praxiserprobtes Forward-Rate-Modell

### Das Cheyette-Modell (Cheyette (1992))

$$(13) \quad f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \sigma_f(s, t) dW(s) + \int_0^t \int_s^T \sigma_f(s, T) \sigma_f(s, u) du ds$$

mit

$$(14) \quad \sigma_f(t, T) = \sum_{i=1}^N \beta_i(t) \frac{\alpha_i(T)}{\alpha_i(t)}.$$

Man erhält explizite Formeln:

$$(15) \quad r(t) = f(t, t) = f(0, t) + \sum_{j=1}^N x_j(t)$$

$$(16) \quad P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left( - \sum_{i=1}^N \frac{A_i(T) - A_i(t)}{\alpha_i(t)} x_i(t) - \sum_{i, j=1}^N \frac{(A_i(T) - A_i(t))(A_j(T) - A_j(t))}{2\alpha_i(t)\alpha_j(t)} V_{ij}(t) \right)$$

wobei  $x(\cdot)$ ,  $V(\cdot)$  sogenannte Zustandsprozesse sind (können genau angegeben werden).

**Vorteile:** Sparsame Darstellung der Volatilitätsstruktur über die Zustandsprozesse, laut empirischer Literatur sehr gutes empirisches Verhalten.

## Anwendung: *Das HJM-G2++Modell*

Wähle im Cheyette-Ansatz  $N=2$ , 2-dim. Brownsche Bewegung (mit Korrelation  $\rho$ ) und

$$(17) \quad \alpha_i(t) = \exp(-\kappa_i t), \quad \beta_i(t) = \sigma_i$$

$\Rightarrow$

$$(18) \quad r(t) = f(0,t) + x_1(t) + x_2(t)$$

$$(19) \quad dx_i(t) = (-\kappa_i x_i(t) + V_{i1}(t) + V_{i2}(t))dt + \sigma_i dW_i(t), \quad x_i(0) = 0$$

$$(20) \quad V_{ii}(t) = \sigma_i^2 \frac{1 - e^{-2\kappa_i t}}{2\kappa_i}, \quad V_{ij}(t) = \frac{\rho \sigma_i \sigma_j}{\kappa_i + \kappa_j} \left( 1 - e^{-(\kappa_i + \kappa_j)t} \right)$$

### Vorteile

- 2-Faktor-Modell mit perfekter Anpassung und normal verteilter Short Rate
- Einfach und effizient zu implementieren (MC-Simulation, Baumverfahren)
- Geschlossene Formeln für Zerobond, Bond-Optionen, Cap, Floor, Swaption (nur semi-geschlossene Lösung)
- Gute Kalibrierungsergebnisse

## 5. LIBOR-Markt-Modelle: Nicht mehr als nötig ...

**Idee 3:** *Modelliere nur, was wirklich gebraucht und am Markt echt beobachtbar ist*

- ⇒ Modelliere die zeitliche Entwicklung einfacher Zinsraten als Prozesse
- ⇒ **LIBOR-Marktmodelle** (Miltersen, Sandmann, Sondermann (1997) und Brace, Gatarek, Musiela (1997))

### **Hauptzutat:**

$\delta$ -(forward)-LIBOR-Rate zur Zeit  $t$  für einen Kredit der Laufzeit  $\delta$ , der in  $T$  startet ist

$$(21) \quad P(t, T) = P(t, T + \delta)(1 + \delta L(t, T)) \text{ , d.h.. } L(t, T) = \frac{1}{\delta} \left( \frac{P(t, T)}{P(t, T + \delta)} - 1 \right)$$

### **Praktische Durchführung:**

Modelliere die zu einer gegebenen Zahlungsstruktur gehörenden LIBOR-Raten log-normal verteilt, also

$$(22) \quad dL_i(t) = L_i(t) \sigma_i(t) dW_{i+1}(t),$$

$W_i(\cdot)$  Br. Bewegungen unter dem jeweiligen  $t_i$ -Forward-Maß

## **Vorteile**

- Nicht-negative LIBOR-Raten
- Black'76-Formel für Swaption-Preise => sehr populär in Cap- oder Swaption-Märkten
- Kein Modellieren der zeitlichen Entwicklung von Kurven notwendig

## **Nachteile**

- Konzeptionell aufwändig (Korrelationsstruktur, gemeinsame Simulation verschiedener Raten unter einem Maß, ...)
- Parameterkalibrierung schwierig
- Produkte mit Zahlungen zu beliebigen Zeitpunkten nicht bewertbar
- Gegenwärtig nicht einsetzbar !!!

**Alternative zur Verwendung der Black'76-Formel:**

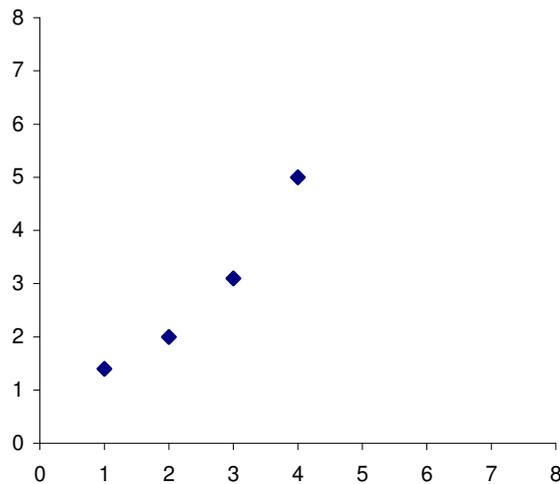
**SABR-Modell** (Hagan e.a. (2002))

## 6. Probleme der Praxis – Herausforderungen an die Forschung

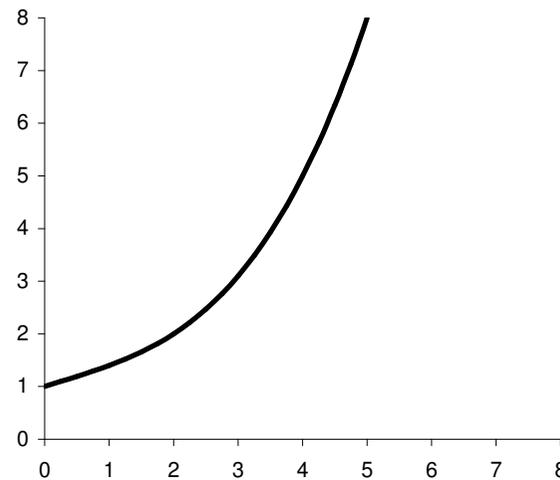
### i) Kalibrierung der Zinsstrukturkurve

- Wie erhält man eine stetige Kurve aus diskreten Daten ?
  - **Bundesbank:** Svenson-Verfahren (trifft die Daten **nicht** perfekt !)
  - Alternativen (?)
- Ist perfekter Fit notwendig/gut/unverzichtbar ?

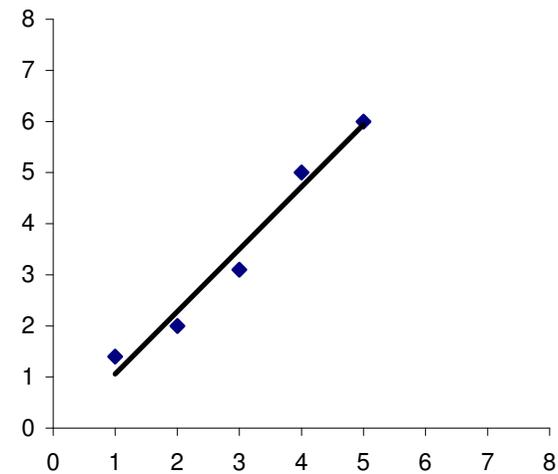
Daten



Perfekter Fit



Zusätzliche Daten



⇒ **Vorsicht vor Overfitting !**

## **ii) Short-Rate- oder Forward-Rate-Modell oder was Neues ?**

- Schwierige Frage und nicht leicht zu beantworten
- Auf jeden Fall reichen 1-Faktor-Modelle nicht aus
- Langfristmodellierung erfordert mindestens zwei Faktoren
- Modelle mit verschiedenen ökonomischen Zuständen (Hoch- oder Niedrigzinsphase, Vorwahlphase, ...) wünschenswert => Forschungsbedarf
- Globale Antwort nicht möglich
- Analyse der Auswirkungen nötig („Was bewirken Abweichungen überhaupt?“)

## **iii) Eigenes Modell oder “eingekauftes Modell”**

- Ist Kompetenz/Kapazität zur Modellentwicklung vorhanden ?
- Beachte: Jedes Modell benötigt gute Inputparameter !!!
- Kein eingekauftes Modell/ keine Szenarien ohne Test verwenden !!!
- Kein Modell ohne fortwährende Überprüfung verwenden

#### **iv) Weitere Modelle**

Modellkonzepte, die auf Praxistauglichkeit untersucht werden sollten:

- Positive Zinsmodelle von Cairns, Flesaker/Hughston (z.B. in Pfeiffer e.a (2010))
- Potentialansatz von Rogers (1997)
- Varianten des SABR-Modells (Hagan e.a. (2002))
- Modelle mit Sprüngen (?)

#### **v) Forschungsideen**

##### **Zinszyklen**

- Modellierung über Langfristdrift der Short Rate bzw. Volatilitätsstruktur der Forward-Rate-Kurve => Forschung notwendig

##### **Ökonomische Zustände**

- „Hintergrundzustand“ => Hidden Markov Models (Forschungsprojekt)

##### **Interaktion mit anderen Investmentformen**

- „Andersrum“ => Zins Bestandteil deren Preisdynamik

## vi) Weiteres Vorgehen

- Koordinierte Forschung (oder nicht) ?
- Entwicklung eines Vorschlags für die Verwendung von Zinsmodellen mit/ohne „Anbieter“ ?
- Einzig sinnvolles Vorgehen: Praxis **und** Wissenschaft
- Zeitnahe Erstellung eines Forschungskonzepts/-plans über DAV/DGVFM

### Aber:

- *Es wird **keine Wunderwaffe** entstehen, sondern allenfalls ein realistischeres Modell*
- *Ein besseres Zinsmodell ist **nur ein Bestandteil** eines guten Risikomanagements*
- *Weitere Alternativen wie Kopplung von **Garantien an Inflation**, bedingte Garantien, **einfache aber zweckmäßige Produkte**, besseres Verständnis des Finanzmarkts, ... werden interessant/notwendig sein, um zukunftsichere Lebensversicherung anbieten zu können*

*Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit !*

Prof. Dr. Ralf Korn  
TU Kaiserslautern  
Fraunhofer ITWM  
[korn@mathematik.uni-kl.de](mailto:korn@mathematik.uni-kl.de)  
0631-31600-4658



## *Literatur*

Acar, S., Natcheva-Acar, K. (2009) A guide on the implementation of the Heath-Jarrow-Morton Two-Factor Gaussian Short-Rate Model (HJM-G2++), **Berichte des Fraunhofer ITWM** ([www.itwm.fhg.de/de/zentral\\_berichte/berichte2009/](http://www.itwm.fhg.de/de/zentral_berichte/berichte2009/) )

Beletski T., Korn R. (2006) Optimal Investment with Inflation-linked Products . in: *Advances in Risk Management* (Hrsg. G.N. Gregoriou), Palgrave-Mac Millan, 170-190.

Black F, Karasinski P. (1991) Bond and option pricing when short rates are log-normal. **Financial Analysts Journal**, 47(4), 52–59.

Brigo D., Mercurio F. (2001) *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Springer.

Cheyette, O. (1992) Term structure dynamics and mortgage valuation. **Journal of Fixed Income**, March:28–41, 1992.

Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. (1985) A Theory of the Term Structure of Interest Rates. **Econometrica**, 53, 385-407.

Hagan P., Kumar D., Lesniewski A., Woodward D (2002) Managing Smile Risk. **Wilmott Magazine**, September 2002, pp. 84-108.

Heath D., Jarrow R., Morton A. (1992) Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodol. for contingent claim valuation. **Econometrica**, 60(1):77-105.

Ho T.S.Y, Lee S.-B. (1986) Term structure and pricing interest rate contingent claims. **Journal of Finance**, 41(5): 1011-1029.

Hull J., White A. (1990) Pricing interest rate derivative securities. **Review of Financial Studies**, 3(4):573–592.

Keller-Ressel M., Steiner T. (2008) Yield curve shapes and the asymptotic short rate distribution in affine one-factor models. **Finance and Stochastics** 12, 149-172.

Korn E., Korn R., Kroisandt G. (2010) *Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance*. Chapman & Hall, Chapter 5.

Korn R., Kruse S. (2004) Einfache Verfahren zur Bewertung von inflationsgekoppelten Finanzprodukten. **Blätter der DGVM**, 26, 351-67.

Litterman R. , Scheinkman J. (1991) Common Factors Affecting Bond Returns. **Journal of Fixed Income** 1, 54-61.

Pfeiffer R., Bierbaum J., Kunze R., Quapp N., Bäuerle N. (2010) Zinsmodelle für Versicherungen - Diskussion der Anforderungen und Vergleich der Modelle von Hull-White und Cairns. **Blätter der DG VFM** 31, 261-290.

Rogers L.C.G. (1995) Which model for term-structure of interest rates should one use? **Mathematical Finance – IMA Volume 65**, 93-116.

Rogers L.C.G. (1997) The potential approach to the term structure of interest rates and foreign exchange rates. **Mathematical Finance** 7, 157-176.

Vasicek O.A. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. **Journal of Financial Economics**, 5, 177–188.