# Risikomaße in der Solvenzregulierung und im Asset-Liability-Management

**Stefan Weber**
Leibniz Universität Hannover

Hannover – 19. November 2014

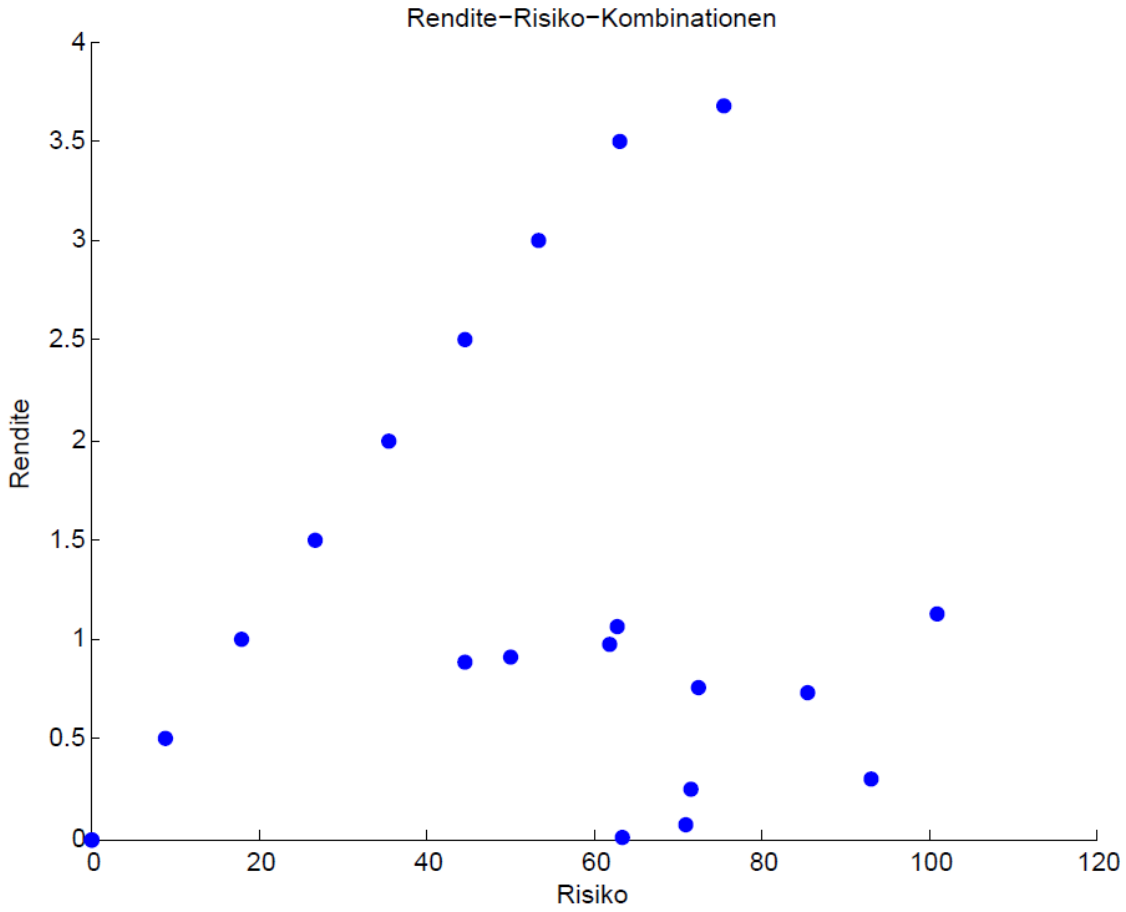
# Motivation

- Eine wesentliche Aufgabe des Managements von Versicherungsunternehmen ist die **Steuerung von Rendite und Risiko**
- Wichtige Kenngrößen sind z.B. der
  - **Market-Consistent Embedded Value** (MCEV)
    zur Messung des Werts des Geschäfts
    sowie der
  - **Value at Risk** (V@R)
    zur Messung des Risikos.

# Motivation (2)

- Zur Optimierung von Rendite und Risiko sind adäquate Strategien zur Steuerung von Aktiv- und Passivseite der Bilanz erforderlich.
- Die Beurteilung des Nutzens von Maßnahmen verlangt eine ganzheitliche Betrachtung innerhalb der Bilanz:
  - Auswirkungen auf Kenngrößen wie MCEV (VIF, FS, ReC), SCR,...
  - Beurteilung dynamischer Managementregeln in Fallstudien.
  - Hierfür werden adäquate ALM-Modelle benötigt.

# Efficient Frontier



# Ziel des heutigen Vortrags

- Fokus auf die **Risikomessung**
  - Kurze Beschreibung von
    Solvency II – Säule I: Quantitative Überwachung
  - Schwächen von V@R
  - Bessere Alternativen
- MCEV-Berechnung stand bereits im Fokus des
  - Weiterbildungstages am 20. September 2013 sowie eines
  - Artikels im Aktuar 1, 4-8, 2014.

# Überblick

(i) Solvency II: SCR-Berechnung

(ii) Alternativen zu V@R

(iii) Statistik des Risikos: Backtesting und Robustheit

# Solvency II

# Solvency II

- Paradigmenwechsel zu Solvency I:

  bessere Risikomessung von Bilanzpositionen

- Methodik:
  - Standardformel oder internes Modell
  - Marktwertansatz statt Werte aus dem Rechnungswesen
  - Drei-Säulen-Ansatz

# Drei Säulen

- **I. Quantitative Überwachung**
- **II. Qualitative Überwachung**
- **III. Marktdisziplin/Offenlegung**

# Drei Säulen

- **I. Quantitative Überwachung**
  - Marktwertorientierte Bewertung der Bilanz
  - Berechnung des Solvenzkapitals

  ⇒ Nutzung von Standardformel oder internem Modell zur Kapitalermittlung
- II. Qualitative Überwachung
- III. Marktdisziplin/Offenlegung

# Solvenzbilanz

- Ziel ausreichender Eigenmittel
  - Begleichung von Verlusten aus übernommenen Risiken
  - zur Sicherung der Ansprüche der Versicherungsnehmer und anderer Begünstigter
- Solvenzbilanz
  - Vollständige Bewertung der Bilanzaktiva und -passiva,
  - d.h. der Vermögenswerte, der Verbindlichkeiten und der versicherungstechnischen Rückstellungen
- SCR = Solvency Capital Requirement
  - Grundidee: Ruinwahrscheinlichkeit des Unternehmens für das Folgejahr soll unter $0,5\%$ liegen.

# Solvenzbilanz

**Aktiva**

- Marktwert der Vermögenswerte

**Passiva**

- Ökonomisches Kapital
  - d.h. SCR plus Surplus
- Nicht hedgebare Rückstellungen:
  - Best Estimate
  - Risk Margin
- Hedgebare Rückstellungen
  - Market-Consistent Value

# SCR

The SCR corresponds to the economic capital a (re)insurance undertaking needs to hold in order to limit the probability of ruin to 0.5%, i.e. ruin would occur once every 200 years...

The SCR is calculated using Value-at-Risk techniques, either in accordance with the standard formula, or using an internal model: all potential losses, including adverse revaluation of assets and liabilities, over the next 12 months are to be assessed. The SCR reflects the true risk profile of the undertaking, taking account of all quantifiable risks, as well as the net impact of risk mitigation techniques.

(Proposal for a Directive of the European Parliament and of the Council on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance - Solvency II, COMMISSION OF THE EUROPEAN COMMUNITIES, Brussels, 10.7.2007)

# SCR (2)

- Die Standardformel stellt nur eine sehr unvollkommene Approximation der oben beschriebenen Größe dar.
- Für interne Modelle kann die Formulierung wie folgt interpretiert werden:
  - Das stochastische ökonomische Ergebnis (P&L) über den Zeithorizont von einem Jahr berechnet sich aus dem ökonomischen Ergebnis aus Aktiv- und Passivseite, sonstigen Risiken und Steuern innerhalb eines Jahres.
  - Das Unternehmen ist solvent, solange ein negatives ökonomisches Ergebnis nicht das gesamte zu Beginn verfügbare Eigenkapital aufzehrt.
  - Die SCR-Definition führt dann auf den Value at Risk des einjährigen Unternehmensergebnisses.

# SCR in einem vereinfachten internen Modell

- **Zeitpunkte** $t = 0, 1$
- **Wert der Assets**: $A_t$, $t = 0, 1$
- **Wert der Rückstellungen**: $L_t$, $t = 0, 1$
- **Eigenkapital** (NAV): $E_t = A_t - L_t$, $t = 0, 1$
- **Level**: $\alpha = 0.5\%$

$$P(E_1 \leq 0) \quad \leq \quad \alpha$$

$$\Leftrightarrow \; V@R_\alpha(E_1) \leq 0 \; \Leftrightarrow \; V@R_\alpha(E_1 - E_0) \leq E_0 \quad \Leftrightarrow \quad V@R_\alpha(\Delta A_1 - \Delta L_1) \leq E_0,$$

wobei $\Delta A_1 = A_1 - A_0$, $\Delta L_1 = L_1 - L_0$.

Laufende Prämien, Steuern, etc. sollen dabei schon mitberücksichtigt sein.

# SCR in einem vereinfachten internen Modell (2)

Definiere folglich den **SCR** als:

$$\mathbf{SCR} = \mathbf{V@R}_\alpha(\mathbf{\Delta A_1} - \mathbf{\Delta L_1}) = \mathbf{V@R}_\alpha(\mathbf{\Delta MCEV})$$

Die **Solvenzbedingung** lautet dann:

$$\mathbf{SCR} \leq \mathbf{E_0}.$$

# Alternativen zu V@R

# Statische Risikomaße

- Modell über eine Zeitperiode wie in Solvency II: $t = 0, 1$
- $\mathcal{X}$ ist der Wert einer Position zum Zeitpunkt $1$, modelliert als Zufallsvariable (P & L)

**Risikomaße**

$\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$

- Monotonie: Falls $X \leq Y$, dann $\rho(X) \geq \rho(Y)$.
- Cash-Invarianz: Falls $m \in \mathbb{R}$, dann $\rho(X + m) = \rho(X) - m$.

**Ein Risikomaß ist eine Kennziffer, die gewisse Eigenschaften zukünftiger Bilanzpositionen zusammenfasst. Insbesondere können Risikomaße wie V@R als Maße des Downside Risk verwendet werden.**

# Kapitalanforderung

- Eine Position $X \in \mathcal{X}$ heißt akzeptabel, falls $\rho(X) \leq 0$.

- Die Familie $\mathcal{A}$ aller akzeptablen Positionen ist die *Akzeptanzmenge*.
- Jedes Risikomaß $\rho$ kann als Kapitalanforderung dargestellt werden, d.h.

$$\rho(X) = \inf \{m \in \mathbb{R} : \; X + m \in \mathcal{A}\} \, .$$

**Beispiel**

$$\mathrm{V@R}_\lambda(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} : \; P[m + X < 0] \leq \lambda\}$$

"Kleinster Geldbetrag, der einer Position hinzugefügt werden muss, so dass die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes kleiner ist als $\lambda$."

# Diversifikation

Semikonvexität:

$$\rho(\alpha X + (1-\alpha)Y) \leq \max(\rho(X), \rho(Y)) \qquad (\alpha \in [0,1]).$$

$\Longrightarrow$

Konvexität (Föllmer & Schied, 2002):

$$\rho(\alpha X + (1-\alpha)Y) \leq \alpha\rho(X) + (1-\alpha)\rho(Y) \qquad (\alpha \in [0,1]).$$

# Average Value at Risk

$$\mathrm{AV@R}_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \mathrm{V@R}_\gamma(X)d\gamma$$

**Eigenschaften**

- kohärent (d.h. konvex und positiv homogen)
- sensitiv gegenüber großen Verlusten
- Grundlage des Swiss-Solvency-Tests
- beliebte Alternative zu V@R in der Praxis
- verteilungsbasiert und stetig von oben
- Baustein einer großen Klasse von Risikomaßen

# Utility-based Shortfall Risk (UBSR)

$\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvexe Verlustfunktion, $z$ innerer Punkt des Wertebereichs von $\ell$.

Die Akzeptanzmenge ist definiert als

$$\mathcal{A} = \{X \in L^\infty : \; E_P\left[\ell(-X)\right] \leq z\}$$

$\mathcal{A}$ induziert ein konvexes Risikomaß $\rho$:

$$\rho(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} : \; X + m \in \mathcal{A}\}$$

**Einfache Formel**

Das Risikomaß $\rho(X)$ ist die eindeutige Nullstelle $s_*$ der Funktion

$$f(s) := E[\ell(-X - s)] - z.$$

# Utility-based Shortfall Risk (UBSR)

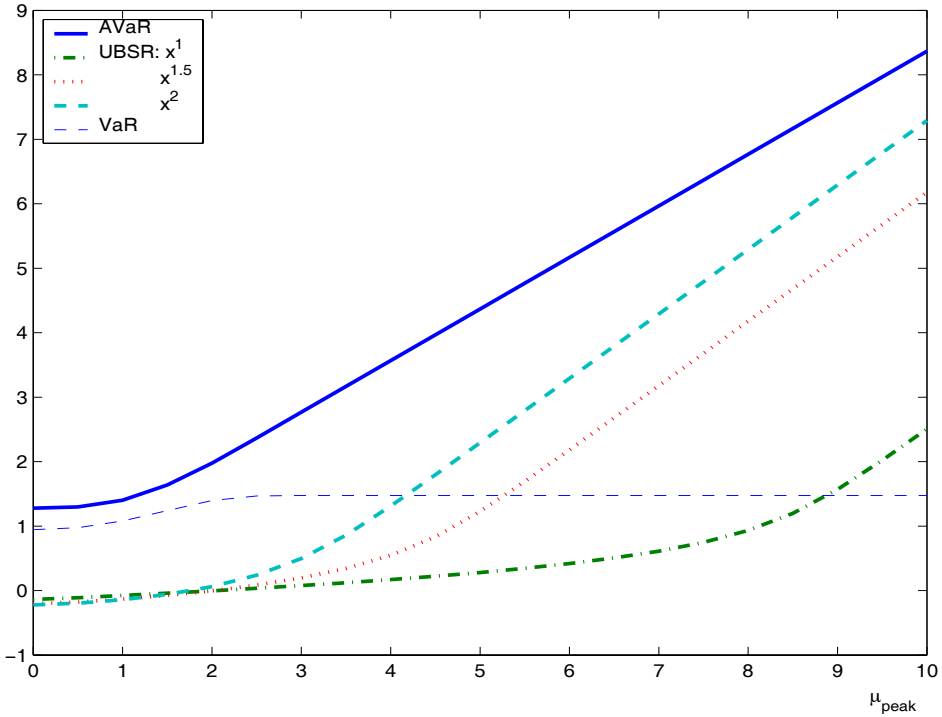
## Eigenschaften

- konvex
- sensitiv gegenüber großen Verlusten
- verteilungsbasiert und stetig von oben
- einfach zu schätzen und zu implementieren

Literatur:

Föllmer & Schied (2002), W. (2006), Giesecke, Schmidt & W. (2008), Dunkel & W. (2010)

# Sensitivität




$\mathrm{V@R}_{0.05}$, $\mathrm{AV@R}_{0.05}$ und UBSR mit $p \in \left\{1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ und $z = 0.3$ einer Mischung einer Student $t$ (Gewicht $0.96$) und einer Normalverteilung mit Mittelwert $\mu$ (Gewicht $0.04$) als Funktionen von $\mu$.

# Value at Risk in den Medien

"David Einhorn, who founded Greenlight Capital, a prominent hedge fund, wrote not long ago that VaR was

> '*relatively useless as a risk-management tool and potentially catastrophic when its use creates a false sense of security among senior managers and watchdogs. This is like an air bag that works all the time, except when you have a car accident.*' "

"Nicholas Taleb, the best-selling author of 'The Black Swan,' has crusaded against VaR for more than a decade. He calls it, flatly, '*a fraud.*' "

("Risk Mismanagement", New York Times, 2. Januar 2009)

# Anwendung auf den SCR

# SCR in einem vereinfachten internen Modell

- **Zeitpunkte** $t = 0, 1$
- **Wert der Assets**: $A_t$, $t = 0, 1$
- **Wert der Rückstellungen**: $L_t$, $t = 0, 1$
- **Eigenkapital** (NAV): $E_t = A_t - L_t$, $t = 0, 1$

$$\begin{aligned} & P(E_1 \leq 0) \leq \alpha \\ \Leftrightarrow \quad & E_1 \in \mathcal{A}_{\mathrm{V@R}_\alpha} \\ \Leftrightarrow \quad & SCR := \mathrm{V@R}_\alpha(\Delta A_1 - \Delta L_1) \leq E_0, \end{aligned}$$

wobei $\Delta A_1 = A_1 - A_0$, $\Delta L_1 = L_1 - L_0$.

# Allgemeiner SCR

- **Zeitpunkte** $t = 0, 1$
- **Wert der Assets**: $A_t$, $t = 0, 1$
- **Wert der Rückstellungen**: $L_t$, $t = 0, 1$
- **Eigenkapital** (NAV): $E_t = A_t - L_t$, $t = 0, 1$

$$\begin{aligned} & \rho(E_1) \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & E_1 \in \mathcal{A}_\rho \\ \Leftrightarrow \quad & SCR := \rho(\Delta A_1 - \Delta L_1) \leq E_0, \end{aligned}$$

wobei $\Delta A_1 = A_1 - A_0$, $\Delta L_1 = L_1 - L_0$.

# Allgemeiner SCR (2)

- **Forderung**: $E_1$ akzeptabel bezüglich Risikomaß $\rho$
- **Solvenzbedingung**:

  Forderung ist äquivalent zu

$$\rho(\mathbf{\Delta MCEV}) = \rho(\mathbf{\Delta A_1} - \mathbf{\Delta L_1}) \leq \mathbf{E_0}$$

(Begründung: Rechnung oben)

# Beispiel: SCR und AV@R

Bei Verwendung des im *Swiss Solvency Test* verwendeten Risikomaßes

$$\mathbf{AV@R}$$

ergibt sich als SCR

$$\mathbf{AV@R_\lambda(\Delta MCEV) = AV@R_\lambda(\Delta A_1 - \Delta L_1)}$$

In diesem Fall beschränkt die Solvenzbedingung nicht nur die Wahrscheinlichkeit der Insolvenz sondern auch den mittleren Schaden im Falle der Insolvenz.

- Aus gesamtökonomischer Sicht ist dieses ein vernünftiger Ansatz.
- Alternativ kann auch UBSR verwendet werden.

# Statistik des Risikos: Backtesting und Robustheit

# Motivation

Risikomaße sollten auch aus statistischer Sicht adäquate Eigenschaften besitzen, um sie mit Daten abzugleichen oder zu schätzen:

- **Elicitability**:
  - Gute Eigenschaft beim Backtesting? (Gneiting, 2011)
  - Verallgemeinerte Quantilregressionsmethoden (Koenker, 2005)
- **Robustheit**:
  - Empfindlichkeit gegenüber Modellwahl

# Elicitability

Eine Scoring-Funktion $S : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ erfüllt folgende Eigenschaften:

- $S(x, y) \geq 0$, und $S(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $x \mapsto S(x, y)$ wachsend für $x > y$ und fallend für $x < y$
- $x \mapsto S(x, y)$ stetig

**Definition 1** *Ein statistisches Funktional $T : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ ist* **elicitable** *auf $\mathcal{M}$, falls eine Scoring-Funktion $S$ existiert, so dass für alle $\mu \in \mathcal{M}$:*

$$\int S(x, y)\mu(dy) < \infty,$$

$$\mathbf{T}(\mu) = \mathrm{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}} \int \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mu(\mathbf{dy})$$

# Charakterisierung

- Auf Basis eines Resultats in W. (2006) können alle **elicitablen Risikomaße** unter schwachen technischen Voraussetzungen an die Scoring-Funktion $S$ charakterisiert werden.
- Das entsprechende Korollar ist in Bellini & Bignozzi (2014) im Detail ausgearbeitet.
- Delbaen, Bellini, Bignozzi & Ziegel (in Vorbereitung) können für den Spezialfall der konvexen Risikomaße auf die schwachen topologischen Voraussetzungen weitgehend verzichten.

# Charakterisierung (2)

**Theorem 1** *Das Risikomaß $\rho$ sei elicitable.*

*Dann gilt:*

*(i)* *$\rho$ ist konvex genau dann, wenn $\rho$ zur Klasse der Utility-based Shortfall Risks gehört.*

*(ii)* *$\rho$ ist kohärent genau dann, wenn $\rho$ ein Expectil ist.*

**Bemerkung**

AV@R ist nicht elicitable. (W., 2006; Gneiting, 2011)

# Expectile

Spezialfall eines kohärenten UBSR mit stückweise linearer Verlustfunktion

$$\ell(x) = z + \alpha x^+ - \beta x^-,$$

$x \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq \beta > 0$ mit Level $z \in \mathbb{R}$.

**Akzeptabilität**

Eine Position $X \in L^\infty$ ist akzeptabel genau dann, wenn

$$\beta E(X^+) - \alpha E(X^-) \geq 0,$$

d.h. ein gewichtetes Mittel aus dem Erwartungswert der Gewinne und dem Erwartungwert der Verluste größer als 0 ist.

# Robustheit

# Robustheit

- Konvexe Risikomaße sind kritisiert worden, weil sie nicht Hampel-robust sind (Cont, Deguest & Scandolo, 2010; Kou, Peng & Heyde, 2013)
- Diese Art der Robustheit ist jedoch mit der schwachen Topologie verknüpft und mittels Lévy- oder Prohorov-Metrik definiert
- Hampel-Robustheit impliziert, dass keine Sensitivität bezüglich extremer Risiken bestehen kann.

# Robustheit

- Konvexe Risikomaße sind kritisiert worden, weil sie nicht Hampel-robust sind (Cont, Deguest & Scandolo, 2010; Kou, Peng & Heyde; 2013)
- Diese Art der Robustheit ist jedoch mit der schwachen Topologie verknüpft und mittels Lévy- oder Prohorov-Metrik definiert
- Hampel-Robustheit impliziert, dass keine Sensitivität bezüglich extremer Risiken bestehen kann.

**Frage**:

**Sind Hampel-robuste Funktionale dann geeignete Risikomaße?**

# Robustheit (2)

- Robustheit hängt von der Metrik auf dem Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße ab
- Risikomaße sind nicht entweder robust oder nicht robust, sondern mehr oder weniger robust
- $\exists$ Tradeoff zwischen Sensitivität gegenüber extremen Ereignissen und Robustheit
- Detaillierte Darstellung dieser Ideen in Krätschmer, Schied & Zähle (2012, 2013, 2014)

# Verteilungsbasierte Risikomaße

Ein Risikomaß $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ ist verteilungsbasiert, wenn

$$\rho(X) = \rho(Y),$$

für $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y)$.

**Risikomaße auf der Ebene von Verteilungen**

In diesem Fall definiert ein Risikomaß eine Abbildung

$$\mathcal{R}_\rho(\mu) := \rho(X) \text{ mit } \mathcal{L}(X) = \mu$$

auf Borel-Wahrscheinlichkeitsmaßen.

# Qualitative Robustheit

- Sei $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $X_i(\omega) = \omega(i)$, und $\mathcal{F} = \sigma(X_i : i \in \mathbb{N})$.
- Für jedes Borel-Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu$ auf $\mathbb{R}$ setze

$$P_\mu := \mu^{\otimes \mathbb{N}}.$$

- $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}_1$ mit Metrik $d_A$
- $d_B$ Metrik auf $\mathcal{M}_1$

$\mathcal{R}_\rho$ robust auf $\mathcal{N}$ bezüglich $d_A, d_B$, falls

$$\forall \mu \in \mathcal{N}, \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0, n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 :$$

$$\nu \in \mathcal{N}, d_A(\mu, \nu) \leq \delta \Rightarrow d_B(P_\mu \circ \hat{\rho}_n^{-1}, P_\nu \circ \hat{\rho}_n^{-1}) \leq \varepsilon$$

wobei $\hat{\rho}_n := \mathcal{R}_\rho(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{X_k})$

# $\psi$-Robustheit

Eine Menge $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}_1$ heißt uniform $\psi$-integrierend, falls

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{\nu\in\mathcal{N}} \int_{\{\psi\geq M\}} \psi d\nu = 0.$$

**Definition 2**

*Ein Risikofunktional $\mathcal{R}_\rho$ heißt $\psi$-robust auf $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1$,*

*falls es robust ist bezüglich $d_\psi$ und $d_{\mathrm{Proh}}$ auf jeder uniform $\psi$-integrierenden Menge $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$.*

# $\psi$-Robustheit (2)

Die Prohorov-$\psi$-Metrik ist

$$d_\psi(\mu,\nu) = d_{\text{Proh}}(\mu,\nu) + \left| \int \psi d\mu - \int \psi d\nu \right|, \quad \mu,\nu \in \mathcal{M}_1^\psi,$$

wobei die Prohorov-Metrik definiert ist als

$$d_{\text{Proh}}(\mu,\nu) = \inf\{\varepsilon > 0 : \mu(A) \leq \nu(A^\varepsilon) + \varepsilon \text{ for all } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

mit $A^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : \inf_{a \in A} |x - a| \leq \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$.

Während die schwache Topologie durch die Prohorov-Metrik induziert ist und keine Sensitivität gegenüber extremen Ereignissen besitzt, ist die $\psi$-schwache Topologie sensitiv gegenüber solchen Ereignissen.

# $\psi$-Robustheit (3)

**Theorem 2** *Sei $\rho : L^\infty \to \mathbb{R}$ ein verteilungsbasiertes Risikomaß und $\bar{\rho} : L^1 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ seine eindeutige Fortsetzung. Sei ferner $\Psi$ eine endliche Young-Funktion, die die $\Delta_2$-Bedingung erfüllt. Setze $\psi(x) = 1 + \Psi(|x|)$, $x \in \mathbb{R}$.*

*Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

- *$\bar{\rho}$ ist endlich auf $H^\Psi$.*
- *Die Abbildung $\mathcal{R}_\rho : \mathcal{M}_{1,c} \to \mathbb{R}$ ist stetig bezüglich der $\psi$-schwachen Topologie.*
- *$\mathcal{R}_\rho : \mathcal{M}_{1,c} \to \mathbb{R}$ ist $\Psi$-robust.*

# Index der qualitativen Robustheit

$L^p$-Räume sind für Anwendungen besonders wichtig. Sei $\Psi_p(x) = |x|^p/p$ mit $0 < p < \infty$, $x \in \mathbb{R}$ und die $\Delta_2$-Bedingung erfüllt.

**Definition 3** $\rho : L^\infty \to \mathbb{R}$ *sei ein verteilungsbasiertes Risikomaß. Der assoziierte* Index der qualitativen Robustheit *ist definiert als*

$$\mathrm{iqr}(\rho) \;=\; \frac{1}{\inf\{p \in (0,\infty) : \mathcal{R}_\rho \textit{ ist } \Psi_p - \textit{robust auf } \mathcal{M}_{1,c}\}} \;\in\; [0,\infty]$$

Konvexe Risikomaße haben immer einen Index der qualitativen Robustheit von höchstens 1. Mit Blick auf Theorem 2 kann dieser immer in folgender Form geschrieben werden:

$$\mathrm{iqr}(\rho) \;=\; \frac{1}{\inf\{p \in [1,\infty) : \bar{\rho} \text{ ist endlich auf } L^p\}} \;\in\; [0,1] \qquad (1)$$

# Elicitability und Robustheit

Konvexe elicitable Risikomaße stimmen mit der Klasse der Utility-based Shortfall Risks überein:

$$\rho(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} : E(\ell(-X - m)) \leq z\}$$

für eine konvexe, wachsende, nicht-konstante Funktion $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $z$ im Inneren des Bildes von $\ell$.

- Setze $\Psi(x) = \ell(x) - \ell(0)$, $x \geq 0$, $\psi(x) = \Psi(|x|) + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion $\Psi$ erfülle die $\Delta_2$-Bedingung.
- Elementare Abschätzungen zeigen, dass $\mathcal{R}_\rho$ stetig ist bezüglich der $\psi$-schwachen Topologie und folglich auch $\psi$-robust.

# Elicitability und Robustheit (2)

## Expectile

Spezialfall eines UBSR mit stückweise linearer Verlustfunktion
$\ell(x) = z + \alpha x^+ - \beta x^-$, $x \in \mathbb{R}$, für $\alpha \geq \beta > 0$ mit Level $z \in \mathbb{R}$.

- Endliche verteilungsbasierte Risikomaße auf $L^1$.
- Index der qualitativen Robustheit ist 1.
- Expectile sind genauso robust wie Average Value at Risk.

# Elicitability und Robustheit (3)

## Monome

Im Fall von Monomen $\ell(x) = x^p \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}$ mit Level $z > 0$ gilt für das assoziierte UBSR:

- $\rho$ ist endlich auf $L^p$ mit einem Index der qualitativen Robustheit von $1/p$.
- Das korrespondierende Funktional $\mathcal{R}_\rho$ ist $\psi_p$-robust.

## Entropisches Risikomaß

- Entropische Risikomaße sind nie endlich auf $L^p$, $1 \leq p < \infty$.
- Gleichung (1) zeigt folglich, dass ihr Index der qualitativen Robustheit gleich $0$ ist.

# Fazit

# Fazit

- V@R hat deutliche Schwächen. Diese Defizite werden von der SCR-Regulierung unter Solvency II geteilt.
- AV@R und Expectile stellen gute zusätzliche Funktionale zur Beurteilung des Downside Risk dar, die in der Praxis implementiert werden können.

**Empfehlung**:

**Die Beurteilung des Downside Risk kann deutlich verbessert werden durch eine gemeinsame Analyse von V@R, AV@R und Expectilen.**