

Formen der Yield- und Forwardkurve im Langzeitverhalten

Martin Keller-Ressel

TU Dresden

22. November 2017

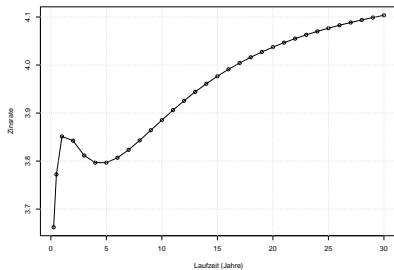
Herbsttagung Fachkreis Versicherungsmathematik, Stuttgart

Zentrale Fragestellungen:

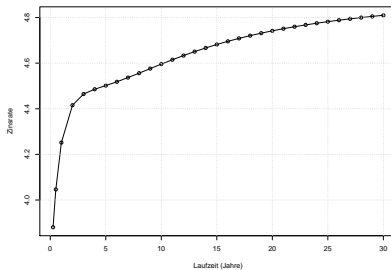
- Welche Formen (*invers, normal, gewölbt, etc.*) der Yield- und Forwardkurve können durch (affine) Short-rate-Modelle erzeugt werden?
- Welchen Einfluss hat die Marktrisikoprämie auf die Form der Yield- und Forwardkurve?
- Welche Form tritt auf lange Sicht am häufigsten auf?
- Allgemeiner: Bestimmung der relativen Häufigkeiten der unterschiedlichen Formen im Langzeitverhalten.

Beispiele für Formen realer Yieldkurven (EUR/EZB):

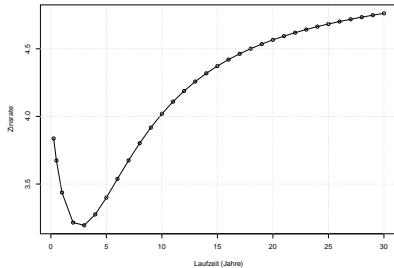
EZB Yield-Kurve am 2007-03-15



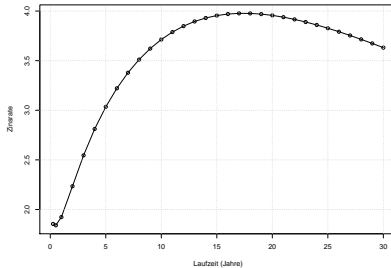
EZB Yield-Kurve am 2007-06-12



EZB Yield-Kurve am 2008-03-02

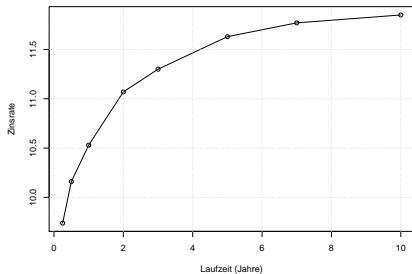


EZB Yield-Kurve am 2008-12-17

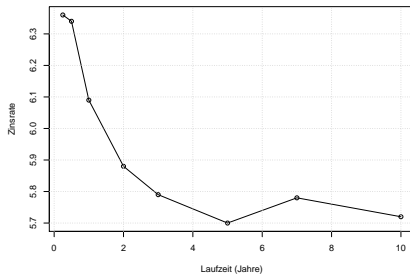


Beispiele für Formen realer Yieldkurven (USD/FED):

Federal Reserve Yield-Kurve am 1983-07-31



Federal Reserve Yield-Kurve am 2000-10-31



Das Vasiček-Modell kann drei dieser Formen abbilden: normal, invers und gewölbt ('humped'), i.e. cf. Vasiček [1977].

Das Cox-Ingersoll-Ross (CIR-)-Modell. . .

Das Vasiček-Modell kann drei dieser Formen abbilden: normal, invers und gewölbt ('humped'), i.e. cf. Vasiček [1977].

Das Cox-Ingersoll-Ross (CIR-)-Modell. . .

- . . . can produce only normal, inverse or humped shapes.

Cox et al. [1985]

Das Vasiček-Modell kann drei dieser Formen abbilden: normal, invers und gewölbt ('humped'), i.e. cf. Vasiček [1977].

Das Cox-Ingersoll-Ross (CIR-)-Modell. . .

- . . . can produce only normal, inverse or humped shapes.

Cox et al. [1985]

- '*... can produce [also] yield curves with one hump or one dip*'

Carmona and Tehranchi [2006]

Das Vasiček-Modell kann drei dieser Formen abbilden: normal, invers und gewölbt ('humped'), i.e. cf. Vasiček [1977].

Das Cox-Ingersoll-Ross (CIR-)-Modell. . .

- . . . can produce only normal, inverse or humped shapes.

Cox et al. [1985]

- '*... can produce [also] yield curves with one hump or one dip*'

Carmona and Tehranchi [2006]

- . . . can not reproduce '*some typical shapes, like that of an inverted yield curve*'.

Brigo and Mercurio [2006]

Das Vasiček-Modell kann drei dieser Formen abbilden: normal, invers und gewölbt ('humped'), i.e. cf. Vasiček [1977].

Das Cox-Ingersoll-Ross (CIR-)-Modell. . .

- . . . can produce only normal, inverse or humped shapes.

Cox et al. [1985]

- '*... can produce [also] yield curves with one hump or one dip*'

Carmona and Tehranchi [2006]

- . . . can not reproduce '*some typical shapes, like that of an inverted yield curve*'.

Brigo and Mercurio [2006]



Teil I

Affine Zinsstrukturmodelle

Wir behandeln die formulierten Fragen im Setting der **homogenen affinen Zinsstrukturmodelle**.

Affine Zinsstrukturmodelle

Ein Zinsstrukturmodell heisst **affin**, wenn die Preise der Nullkuponanleihen von folgender Form sind:

$$P(t, t+x) = \exp(A(t, x) + r_t B(t, x)),$$

wobei r_t die momentane Shortrate bezeichnet.

- Das Modell heisst homogen, wenn A und B nicht von t abhängen.
- Hull-White Erweiterungen des Vasicek- oder CIR-Modell sind nicht homogen.
- Für lange Laufzeiten verhalten sich inhomogene und homogene Modelle allerdings vergleichbar.

- Wir betrachten einen Shortrate-Prozess der Gestalt

$$dr_t = \mu(r_t) dt + \sigma(r_t) dB_t^{\mathbb{P}}.$$

unter dem statistischen Maß \mathbb{P} .

- Die Marktrisikoprämie sei durch $\lambda(r_t)$ gegeben. Der Shortrate-Prozess r_t unter dem risiko-neutralen Maß \mathbb{Q} folgt der Dynamik

$$dr_t = \underbrace{(\mu(r_t) - \lambda(r_t)\sigma(r_t))}_{:=\tilde{\mu}(r_t)} dt + \sigma(r_t) dB_t^{\mathbb{Q}}.$$

- Das Shortrate-Modell erzeugt eine affine Terminstruktur

$$P(t, x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^{t+x} r_s ds \right) \middle| r_t \right]$$

genau dann wenn auch μ und σ^2 affin sind, d.h

$$\tilde{\mu}(r) = \beta r + b, \quad \sigma(r)^2 = \alpha r + a$$

Außerdem können $A(x)$ und $B(x)$ als Lösungen der Riccati'schen Differentialgleichungen

Riccati'sche Differentialgleichungen

$$\partial_x A(x) = \underbrace{\frac{a^2}{2} B(x)^2 + bB(x)}_{=: F(B(x))}, \quad A(0) = 0,$$

$$\partial_x B(x) = \underbrace{\frac{\alpha^2}{2} B(x)^2 + \beta B(x)}_{=: R(B(x))} - 1, \quad B(0) = 0,$$

bestimmt werden.

- Ermöglicht explizite Berechnung der Anleihenpreise im Vasicek und CIR-Modell.

Im Vasicek-Modell ist die Shortrate gegeben durch

Das Vasiček Modell

$$dr_t = -\kappa(r_t - \theta) dt + \sigma dW_t^{\mathbb{P}}, \quad r_0 \in \mathbb{R}$$

mit Marktrisiko­prämie $\lambda(r_t) = \lambda$.

Wir erhalten für F und R

$$F(u) = (\kappa\theta - \sigma\lambda)u + \frac{\sigma^2}{2}u^2 \quad \text{and} \quad R(u) = -\kappa u.$$

Im CIR-Modell ist die Shortrate gegeben durch

Das Cox-Ingersoll-Ross Model

$$dr_t = -\kappa(r_t - \theta)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, \quad r_0 \geq 0$$

mit Marktrisikoprämie $\lambda(r_t) = \lambda\sqrt{r_t}$.

Wir erhalten für F und R

$$F(u) = \kappa\theta u, \quad R(u) = \frac{\sigma^2}{2}u^2 - (\kappa + \sigma\lambda)u.$$

Auch viele Modelle mit Sprüngen in der Shortrate sind affine Zinsstrukturmodelle:

- **Gamma-Modell:**

$$dr_t = -\kappa r_t + dJ_t.$$

J ist Compound-Poisson-Prozess mit Intensität κa und exponentialverteilten Sprunghöhen mit mittlerer Höhe $1/\theta$.
Für F und R erhalten wir

$$F(u) = \frac{\kappa a \theta}{1 - \theta u}, \quad R(u) = -\kappa u.$$

- **Duffie-Garleanu-Modell:** CIR + unabhängige exponentialverteilte Sprünge.

Auch viele Modelle mit Sprüngen in der Shortrate sind affine Zinsstrukturmodelle:

- **Gamma-Modell:**

$$dr_t = -\kappa r_t + dJ_t.$$

J ist Compound-Poisson-Prozess mit Intensität κa und exponentialverteilten Sprunghöhen mit mittlerer Höhe $1/\theta$.

Für F und R erhalten wir

$$F(u) = \frac{\kappa a \theta}{1 - \theta u}, \quad R(u) = -\kappa u.$$

- **Duffie-Garleanu-Modell:** CIR + unabhängige exponentialverteilte Sprünge.

Mathematisch relevanter Aspekt: Eine große Klasse von Modellen kann einheitlich durch Funktionen $F(u)$ und $R(u)$ beschrieben werden!

Teil II

Formen der Yield- und Forwardkurve

Yield- und Forwardkurve

In Affinen Zinsstrukturmodellen ist die **Yieldkurve** gegeben durch

$$Y(r_t, x) := -\frac{\log P(t, t+x)}{x} = -\frac{A(x)}{x} - r_t \frac{B(x)}{x} \quad \text{for all } x > 0 .$$

Die **Forwardkurve** ist gegeben durch

$$f(r_t, x) := -\partial_x \log P(t, t+x) = -A'(x) - r_t B'(x) \quad \text{for all } x > 0 .$$

⇒ Formen der Yield- und Forwardkurve lassen sich durch die Riccati'schen Differentialgleichungen analysieren.

Wir unterscheiden folgende Formen der Yield- oder Forwardkurve:

Definition

Die Yield- oder Forwardkurve heisst

- **normal**, wenn sie streng monoton steigend ist,
- **invers**, wenn sie streng monoton fallend ist,
- **gewölbt**, wenn sie genau ein Maximum (aber kein lokales Minimum) aufweist.

Modellannahmen

- Homogenes affines Zinsstrukturmodell
- Das Modell ist nicht-degeneriert ($F \neq 0$ und r_t ist nicht deterministisch)
- Die Mean-reversion-Bedingung $R'(0) < 0$ gilt.

Definition (Kritische Nullstelle)

Die negative Lösung c der Gleichung

$$R(c) - 1 = 0 .$$

heisst **kritische Nullstelle** von R .

- Unter der Mean-reversion-Bedingung $R'(0) < 0$ existiert c und ist eindeutig.
- Die kritische Nullstelle c ist der eindeutige stabile Gleichgewichtspunkt der Riccati'schen Differentialgleichung für B .

Alle Aussagen für affine Zinsstrukturmodelle lassen sich über die Größen F , R und c formulieren!

Theorem

Unter den getroffenen Annahmen ist der langfristige Zinssatz ('ultimate forward rate') gegeben durch

$$b_{\text{asympt}} := \lim_{x \rightarrow \infty} Y(r_t, x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(r_t, x) = -F(c).$$

- Vasicek-Modell: Kritische Nullstelle $c = -1/\kappa$ und

$$b_{\text{asympt}} = -F(c) = \tilde{\theta} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}, \quad \text{mit} \quad \tilde{\theta} = \theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa}.$$

- CIR-Modell: Kritische Nullstelle

$$c = \frac{2}{\gamma + \kappa + \sigma\lambda}, \quad \text{wobei} \quad \gamma := \sqrt{2\sigma^2 + (\kappa + \sigma\lambda)^2}$$

und

$$b_{\text{asympt}} = \frac{2a\theta}{\gamma + \kappa + \sigma\lambda}.$$

Theorem

Unter den getroffenen Annahmen gilt folgendes;

- Die **Yieldkurve** $Y(r_t, \cdot)$ ist entweder normal, invers oder gewölbt.

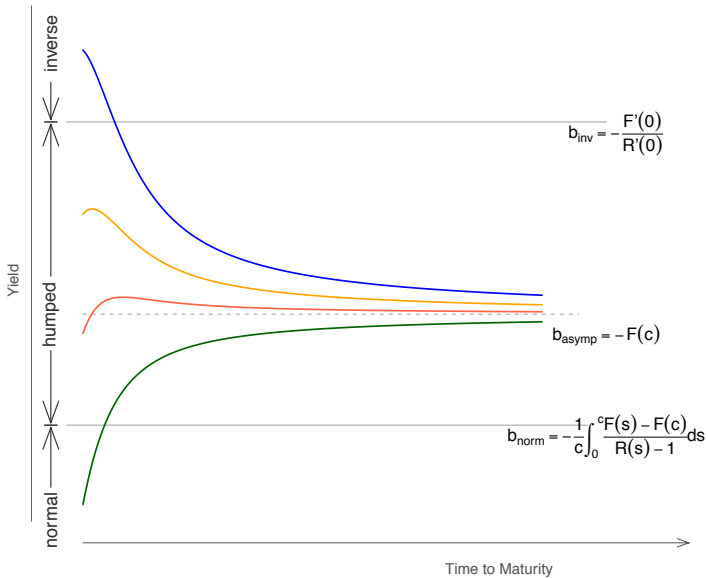
Theorem

Unter den getroffenen Annahmen gilt folgendes;

- Die **Yieldkurve** $Y(r_t, \cdot)$ ist entweder normal, invers oder gewölbt.
- Wir definieren

$$b_{\text{ynorm}} := -\frac{1}{c} \int_0^c \frac{F(u) - F(c)}{R(u) - 1} du, \quad b_{\text{inv}} := -\frac{F'(0)}{R'(0)}$$

Die Yieldkurve ist normal wenn $r_t \leq b_{\text{ynorm}}$, gewölbt wenn $b_{\text{ynorm}} < r_t < b_{\text{inv}}$ und invers wenn if $r_t \geq b_{\text{inv}}$.



Formen der Yieldkurve in affinen Zinsstrukturmodellen

Korollar

Unter den getroffenen Annahmen gilt:

- Die **Forwardkurve** $f(r_t, \cdot)$ ist entweder normal, invers oder gewölbt.
- Wir definieren:

$$b_{\text{fnorm}} := -\frac{F'(c)}{R'(c)}, \quad b_{\text{inv}} := -\frac{F'(0)}{R'(0)}$$

Die Forwardkurve ist normal wenn $r_t \leq b_{\text{fnorm}}$, gewölbt wenn $b_{\text{fnorm}} < r_t < b_{\text{inv}}$ und invers wenn $r_t \geq b_{\text{inv}}$.

Außerdem gilt stets:

$$b_{\text{fnorm}} < b_{\text{ynorm}} < b_{\text{asympt}} < b_{\text{inv}}.$$

Im Vasicek-Modell erhalten wir:

$$\begin{aligned}b_{\text{inv}} &= \tilde{\theta} = \theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} \\b_{\text{asympt}} &= \tilde{\theta} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \\b_{\text{ynorm}} &= \tilde{\theta} - \frac{3\sigma^2}{4\kappa^2} \\b_{\text{fnorm}} &= \tilde{\theta} - \frac{\sigma^2}{\kappa^2}\end{aligned}$$

Bemerkung: b_{asympt} ist das arithmetische Mittel von b_{inv} und b_{fnorm} .

Im CIR-Modell erhalten wir:

$$\begin{aligned}b_{\text{inv}} &= \frac{\kappa\theta}{\kappa + \sigma\lambda} \\b_{\text{asympt}} &= \frac{2\kappa\theta}{\gamma + \kappa + \sigma\lambda} \\b_{\text{ynorm}} &= \frac{2\kappa\theta}{\gamma - (\kappa + \sigma\lambda)} \log \left(\frac{2\gamma}{\gamma + \kappa + \sigma\lambda} \right) \\b_{\text{fnorm}} &= \frac{\kappa\theta}{\gamma}\end{aligned}$$

Bemerkung: b_{asympt} ist das harmonische Mittel von b_{inv} und b_{fnorm} .

Weitere Folgerungen

- 1 Andere Formen ('*dipped*', '*dip-hump*', etc.) können durch ein homogenes affines Shortratemodell nicht erzeugt werden.
- 2 Eine vollständig flache Yield- oder Forwardkurve kann nur durch ein degeneriertes Modell erzeugt werden.

Teil III

Einfluss der Marktrisikoprämie

- Die **(Markt-)Risikoprämie** $\lambda(r)$ beschreibt den Zusammenhang zwischen dem statistischen Verhalten und der Marktwertung an die Shortrate.
- $\lambda(r) = 0$: 'Erwartungswerthypothese' – Anleihenrenditen (Yields) stimmen mit der statistischen Zinserwartung überein.
- $\lambda(r) < 0$: Anleihenrenditen übersteigen statistische Zinserwartung, Anleihenkäufer erhalten Risikoprämie.
- $\lambda(r) > 0$: Anleihenrenditen liegen unterhalb der statistischen Zinserwartung, Anleihenverkäufer können Aufschläge verlangen.

Keine universell gültige Aussage $\lambda(r) > 0$ oder $\lambda(r) < 0$ möglich.

Schätzungen für λ aus der Literatur:

Schätzung für λ	Währung	Zeitraum	Quelle
-1.2	USD	1982 – 2006	Ahmad and Wilmott [2006]
0.0192	USD	1993 – 1995	Bollen et al. [1997]

Risikoprämie (III)

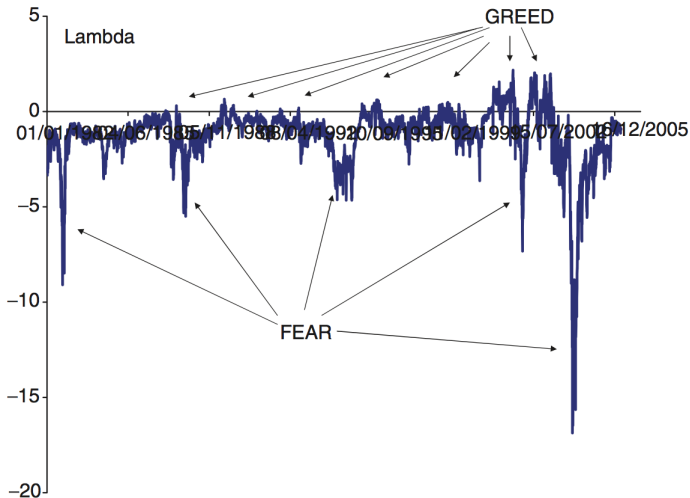


Abbildung: Geschätzte Risikoprämie λ . Quelle: Ahmad and Wilmott [2006]

Die kritische Nullstelle c hängt monoton steigend von der Risikoprämie λ ab. Daraus lässt sich schliessen:

- Marktrisikoprämie λ steigt:
 - Langfristiger Zinssatz b_{asympt} fällt;
 - Anteil inverser Kurven vergrößert sich ($b_{\text{inv}} \downarrow$);
 - Anteil normaler Kurven verringert sich ($b_{\text{fnorm}} \downarrow$);
- Marktrisikoprämie λ fällt
 - Langfristiger Zinssatz b_{asympt} steigt;
 - Anteil inverser Kurven verringert sich ($b_{\text{inv}} \uparrow$);
 - Anteil normaler Kurven vergrößert sich ($b_{\text{fnorm}} \uparrow$);

Teil IV

Langfristige Formen der Yield- und Forwardkurve: Quantitative Analyse

- Ziel: Quantitative Resultate über den relativen Anteil der unterschiedlichen Formen für Yield- und Forwardkurven über lange Zeithorizonte
- Mathematische Werkzeuge: Ergodische Eigenschaften von Feller-Prozessen

Theorem (Pfadweise Ergodizität von Feller-Proz., cf. Kallenberg [1997])

Sei X ein regulärer Feller-Prozess mit Zustandsraum S . Wenn X positiv rekurrent mit invariantem Maß μ ist dann gilt

$$\underbrace{\frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s(\omega) \in A\}} ds}_{\text{'relativer Anteil der Form } A\text{'}} \rightarrow \underbrace{\mu(A)}_{\text{'Wahrsch. von } A \text{ unter invariantem Maß'}}$$

f.s. für alle Borelmengen A in S .

- Die notwendigen Voraussetzungen sind z.B. für Vasicek und CIR-Prozess erfüllt.
- Auch die invariante Verteilung der Shortrate ist in Vasicek und CIR-Modell bekannt.

Theorem

Sei r_t durch das Vasicek- oder das CIR-Modell gegeben. Unter den getroffenen Annahmen gilt

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{Y(r_s, \cdot) \text{ ist invers}\}} ds \rightarrow \mathbb{P}(r_\infty \geq b_{\text{inv}}) =: p_{\text{inv}}$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{Y(r_s, \cdot) \text{ ist gewölbt}\}} ds \rightarrow \mathbb{P}(r_\infty \in (b_{\text{ynorm}}, b_{\text{inv}})) =: p_{\text{hump}}$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{1}_{\{Y(r_s, \cdot) \text{ ist normal}\}} ds \rightarrow \mathbb{P}(r_\infty \leq b_{\text{ynorm}}) =: p_{\text{norm}}$$

\mathbb{P} -f.s. für $t \rightarrow \infty$.

Im Vasicek-Modell gilt

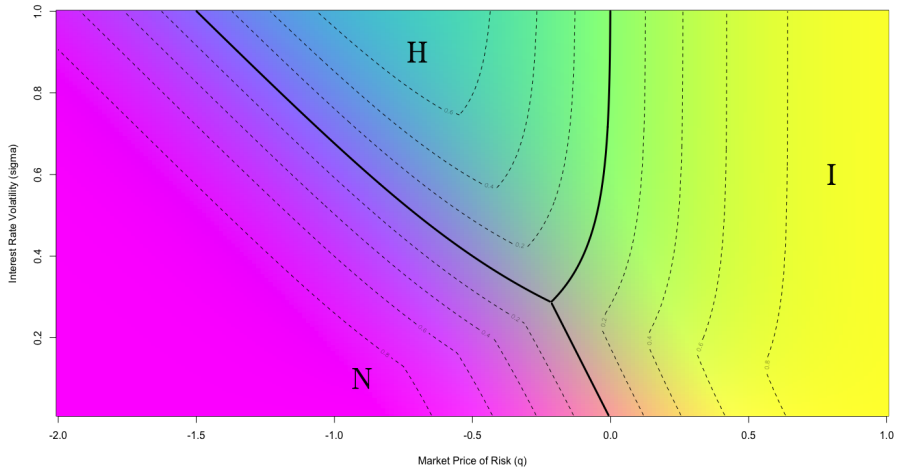
$$p_{\text{inv}} = 1 - \Phi \left(\lambda \kappa^{-1/2} \sqrt{2} \right)$$

$$p_{\text{norm}} = \Phi \left(\lambda \kappa^{-1/2} \sqrt{2} - \frac{3\sigma}{4} \kappa^{-3/2} \right)$$

$$p_{\text{hump}} = 1 - p_{\text{inv}} - p_{\text{norm}}$$

wobei Φ die Standardnormalverteilung bezeichnet.

Map of Yield Curve Shapes in the Vasicek Model



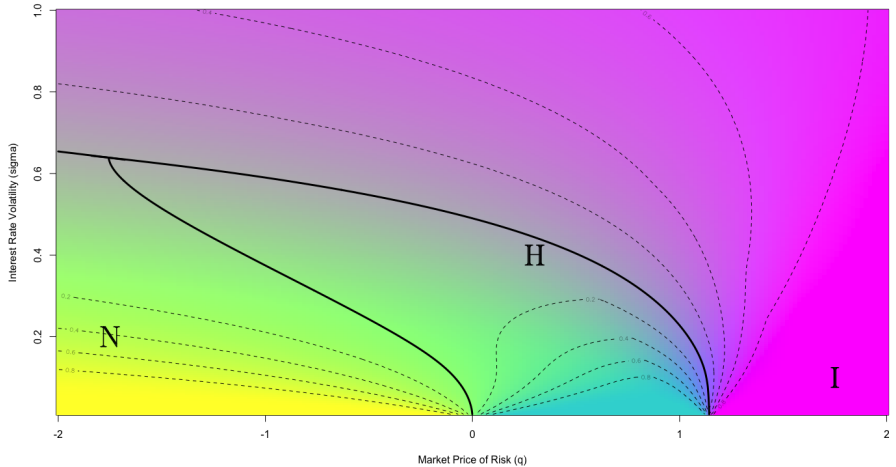
- Positive Risikoprämie: Inverse Yieldkurve
- Negative Risikoprämie: Normale Yieldkurve
- Hohe Volatilität: Gewölbte Yieldkurve

Im CIR-Modell gilt:

$$\begin{aligned}p_{\text{inv}} &= 1 - \Gamma_{k,s} \left(\frac{\kappa\theta}{\kappa - \sigma\lambda} \right) \\p_{\text{norm}} &= \Gamma_{k,s} \left(\frac{4\kappa\theta}{\sigma^2(\gamma + \kappa - \sigma\lambda)} \log \left(\frac{2\gamma}{\gamma + \kappa - \sigma\lambda} \right) \right) \\p_{\text{hump}} &= 1 - p_{\text{inv}} - p_{\text{norm}}\end{aligned}$$

wobei $\Gamma_{k,s}$ die Gammaverteilung mit Formparameter $k = \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}$ and Skalenparameter $s = \frac{\sigma^2}{2\kappa}$ bezeichnet.

Map of Yield Curve Shapes in the CIR Model



- Positive Risikoprämie oder hohe Volatilität: Inverse Yieldkurve
- Negative Risikoprämie, geringe Volatilität: Normale Yieldkurve
- Moderate Risikoprämie, moderate Volatilität: Gewölbte Yieldkurve

- Homogene affine Shortratemodelle können ausschließlich inverse, normale und gewölbte Yield- und Forwardkurven erzeugen
- Die Grenzen zwischen den Regionen für inverse, normale und gewölbte Form können direkt aus den Modellparametern berechnet werden.
- Für das Vasicek- und das CIR-Modell können die relativen Häufigkeiten des Auftretens der unterschiedlichen Kurven ebenfalls explizit berechnet werden.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Riaz Ahmad and Paul Wilmott. The market price of interest-rate risk: Measuring and modelling fear and greed in the fixed-income markets. *Wilmott magazine*, pages 64–70, 2006.

Nicolas PB Bollen et al. Derivatives and the price of risk. *Journal of Futures Markets*, 17(7):839–854, 1997.

Damiano Brigo and Fabio Mercurio. *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Springer Finance. Springer, 2nd edition, 2006.

René Carmona and Michael Tehranchi. *Interest Rate Models: An Infinite Dimensional Stochastic Analysis Perspective*. Springer Finance. Springer, 2006.

John Cox, Jonathan Ingersoll, and Stephen Ross. A theory on the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2):385–407, 1985.

Olav Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. Springer, 1997.

Oldrich Vasiček. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5:177–188, 1977.